

MREŽNO PLANIRANJE

Uvod

Nova tehnika planiranja, premašujući sve ranije je Tehnika mrežnog planiranja. Razvoju je doprinela mogućnost korišćenja u velikom broju oblasti života i rada, relativno jednostavni računski postupci i mogućnost primene računara.

Mrežno planiranje se zasniva na grafičkom prikazivanju aktivnosti usmerenim dužima. Dužina duži nema značenja, a sa dijagrama se vidi međuzavisnost aktivnosti.

U mrežnom planiranju razlikujemo 3 faze:

- analiza strukture i crtanje mrežnog dijagrama
- analiza vremena
- poboljšanje mrežnog dijagrama - smanjenje troškova

U fazi analize strukture i crtanja mrežnog dijagrama određuju se sve aktivnosti, njihove međuzavisnosti, označavaju se događaji i aktivnosti i konstruiše mrežni dijagram. Ova faza zahteva dobro poznavanje premeta planiranja, njegovih delova i međuzavisnosti. U tome učestvuju svi oni koji su vezani za izradu projekta.

Na osnovu konstruisanog mrežnog dijagrama vrši se analiza vremena. To je faza u kojoj se određuju tokovi događaja, i izdvajaju se oni događaji koji su najopterećeniji, da bi ih korigovali. U tu svrhu se koriste razni postupci.

U trećoj fazi, pošto je određen mrežni dijagram, izvršena analiza vremena i određeni tokovi događaja i aktivnosti, radi se na povećavanju vremena trajanja pojedinih tokova u cilju sniženja troškova realizacije projekta. Ovo je faza u kojoj se određuje optimalnost plana po kriterijumu minimalnih troškova.

U drugoj i trećoj fazi se takođe koriste razni postupci, koji čine osnovu mrežnog planiranja. Dva od njih su najranije definisana, a svi ostali su njihova modifikacija i koriste se za specifične projekte. Prvi je *metod kritičnog puta - CPM* (Critical Path Method). Drugi je *PERT metod* (Program Evolution and Review Technique).

CPM metod je definisan 1956. i 1957. godine na zahtev nekih američkih korporacija da se nađe postupak za što efikasnije praćenje ostvarenja nekog projekta. Metod se zasniva na tačnim vremenima trajanja aktivnosti i predstavlja deterministički postupak.

Međutim, za većinu projekata nije lako, čak ni moguće odrediti tačna vremena trajanja aktivnosti, već se ona daju sa izvesnom verovatnoćom. To je zahtev PERT metode. Metoda je definisana 1958. godine i prvi put je korišćena u planiranju lansiranja veštačkih Zemljinih satelita. Znači, ovo je metoda sa stohastičkim vremenima trajanja aktivnosti. Uglavnom se koristi za naučne projekte i za projekte koji se jednom odvijaju.

Osnovni pojmovi

Mrežno planiranje koristi niz pojmova, preuzetih iz drugih oblasti, kao što su planiranje, teorija grafova, verovatnoća itd., ali je njihova definicija prilagođena potrebama mrežnog planiranja.

Projekat - to je skup svih poslova, mera, potrebnih da se realizuje neka namera. Sa stanovišta mrežnog planiranja, projekat je određen vremenom trajanja i troškovima realizacije. Odlika projekta je da se može razbiti na manje delove. Deo projekta koji čini kompaktnu celinu je aktivnost. Postoje 3 vrste aktivnosti:

- realne aktivnosti, koje zahtevaju vreme i sredstva
- čekanje, kao deo projekta u kome se troši vreme bez sredstava
- fiktivne aktivnosti, koje se koriste radi logičkog povezivanja drugih i ne troše ni vreme ni sredstva

Svaka od aktivnosti nekog projekta ima trenutak kada počinje i kada se završava. Ti trenuci su događaji. Oni se dele na:

- početne
- završne

Postoje slučajevi da početni događaji nekih aktivnosti budu završni za druge događaje. Poklapanjem početka jednih i završetka drugih aktivnosti postiže se povezivanje aktivnosti u jednu celinu. Druga osobina događaja je da ne zahtevaju ni vreme ni sredstva.

Aktivnosti i događaji projekta su povezani u jednu celinu- mrežni dijagram. Događaji u mrežnom dijagramu se predstavljaju kružićem, a aktivnosti strelicom sa smerom od početnog ka završnom događaju.

Dužina strelice ne govori o vremenu trajanja aktivnosti. Vreme trajanja aktivnosti se piše pored strelice koja predstavlja tu aktivnost. Za ovakvo predstavljanje aktivnosti je poznato kao mrežni dijagram sa orijentisanim aktivnostima. Mogu se i događaji orijentisati kada se njima prikazuje stanje aktivnosti, što je dosta nepodesno, jer je tako teško prikazati više aktivnosti koje imaju zajednički početni događaj.

Konstrukcija mrežnog dijagrama

Prva faza u mrežnom planiranju je:

- određivanje svih aktivnosti, njihove povezanosti i crtanje mrežnog dijagrama.

To je najvažniji deo faze analize strukture projekta. Posle ove faze ide faza predstavljanja aktivnosti i događaja i njihova numeracija.

1. Analiza strukture projekta

Projekat se odnosi na razne oblasti ljudskih delatnosti. Neki od njih se često ponavljaju (poljoprivreda, građevinarstvo...), dok se kod naučnih delatnosti projekti uglavnom jednom odvijaju i ne ponavljaju se. Zatim, postoje projekti sa većim ili sa manji brojem aktivnosti; za one sa manjim brojem aktivnosti lakše se određuje struktura; za one sa većim brojem aktivnosti, često je teško i pobrojati te aktivnosti - zato se oni razbijaju na manje celine, koje se kasnije spajaju u jednu celinu.

Znači, prvi korak u određivanju strukture projekta je:

- pravljenje spiska aktivnosti (u ovoj fazi učestvuju eksperti za tehnologiju ostvarenja projekta)

- zatim se formira tabela zavisnosti (ima više načina za predstavljanje međuzavisnosti, a posebno se izdvajaju: tabelarno i rangiranjem; oba načina su pogodni za projekte sa manjim brojem aktivnosti)

a) Tabelarno prikazivanje aktivnosti

Ovaj način prikazivanja međuzavisnosti aktivnosti se zasniva na neposrednoj zavisnosti.

Naime, jasno se označava koja aktivnost neposredno sledi iza koje, tj. koja aktivnost neposredno prethodi posmatranoj.

PRIMER:

posmatrana aktivnost (prethodna)	naredna aktivnost (posmatrana)												
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
A		+	+	+									
B					+	+							
C								+			+	+	
D									+	+			
E							+						
F								+			+	+	
G													
H							+						
I								+			+	+	
J													+
K													+
L													
M													

Date su aktivnosti: A,B,...M. Njihova međuzavisnost je data tako što su označene aktivnosti koje neposredno slede posmatranoj aktivnosti.

Vidi se da posle aktivnosti A neposredno slede B,C i D. Posle B neposredno slede E i F itd. Vidi se da završni događaj aktivnosti A se poklapa sa početnim za B,C i D. Takođe, završni događaj aktivnosti B se poklapa sa početnim aktivnostima E i F itd. Lako se određuje koji se završni i početni događaji poklapaju. Takođe se može videti koje aktivnosti neposredno prethode kojoj aktivnosti. Tako aktivnosti A ne prethodi nijedna. Aktivnostima B,C i D neposredno prethodi A, a za E i F neposredno prethodi B itd. To znači da se početni događaji tih aktivnosti poklapaju i da se poklapaju sa završnim događajem aktivnosti B. Na osnovu svega ovoga, lako je nacrtati dijagram mrežnog planiranja.

Tabelarno prikazivanje strukture iam loše i dobre strane. Dobra strana je što je ta struktura pregledna, lako se čita koja aktivnost prethodi kojoj, tj. koja sledi iza koje. Loša strana je što kod projekata sa velikim brojem aktivnosti nije lako dati tabelu sa toliko kolona i vrsta.

b) Prikazivanje strukture projekta na osnovu rangiranja

I ovaj način predstavljanja se zasniva na činjenici koja aktivnost prethodi kojoj.

PRIMER

Aktivnosti		akt.koje neposr. prethode	rang aktivnosti
A	a ₁		1
B	a ₂	A	2
C	a ₃	A	2
D	a ₄	A	2
E	a ₅	B	3
F	a ₆	B	3
G	a ₁₂	E,H	5
H	a ₉	C,F,I	4
I	a ₇	D	3
J	a ₈	D	3
K	a ₁₀	C,F,I	4
L	a ₁₁	C,F,I	4
M	a ₁₃	J,K	5

Rangiranje se vrši na sledeći način:

aktivnost kojoj neposredno ne sledi nijedan, ima rang 1 (početna aktivnost). To je A. Ostale se rangiraju prema tome kakve im aktivnosti neposredno prethode. Aktivnosti kojima neposredno prethodi aktivnost ranga 1 imaju rang 2. Rang 3 imaju aktivnosti kojima neposredno prethodi barem jedna aktivnost ranga 2. Uopšte, aktivnost će biti k-tog ranga ako joj neposredno prethodi bar jedna aktivnost k-1.

Vidi se da aktivnostima B,C i D neposredno prethodi A, čiji je rang 1, a one imaju rang 2. Aktivnostima E i F neposredno prethodi B ranga 2, pa one dobijaju rang 3. Aktivnostima C i H prethodi jedna aktivnost čiji rang još nije određen. Zatim, aktivnosti I i J dobijaju rang 3, jer im prethodi D ranga 2. Aktivnosti H,K i L imaju rang 4, jer im prethode aktivnosti čiji je najviši rang 3. Zatim G dobija rang 5. Rang aktivnosti M je 5, jer joj prethode aktivnosti J i K i jedna od njih ima rang 4.

Nakon što je određen rang svih aktivnosti, radi se prenumeracija aktivnosti i to prema rangu. U okviru istog ranga, redosled je proizvoljan. Nakon određivanja ranga i prenumeracije, pravi se nova tabela.

aktivnosti		akt.koje joj prethode
a ₁	A	-
a ₂	B	a ₁
a ₃	C	a ₁
a ₄	D	a ₁
a ₅	E	a ₂
a ₆	F	a ₂
a ₇	G	a ₄
a ₈	H	a ₄
a ₉	I	a ₃ ,a ₆ ,a ₇
a ₁₀	J	a ₃ ,a ₆ ,a ₇
a ₁₁	K	a ₃ ,a ₆ ,a ₇
a ₁₂	L	a ₂ ,a ₉
a ₁₃	M	a ₈ ,a ₁₀

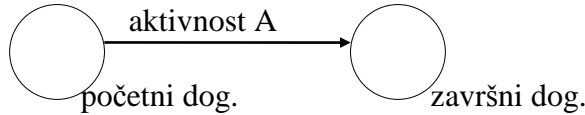
Iz nove tabele se vidi da svakoj aktivnosti neposredno prethode aktivnosti nižeg ranga. Na osnovu ove tabele se lako crta mrežni dijagram: aktivnost a₁ je početna, njoj ne prethodi ni jedna aktivnost. Aktivnostima a₂,a₃ i a₄ neposredno prethodi aktivnost a₁. Aktivnostima a₅ i a₆ neposredno prethodi aktivnost a₂, pa je njihov početni događaj završni događaj te aktivnosti. Slično je sa a₇ i a₈ čiji se početni događaj poklapa sa završnim događajem aktivnosti a₄. Aktivnostima a₉, a₁₀ i a₁₁ neposredno prethode aktivnosti a₃, a₆ i a₇. To znači da se njihovi završni događaji međusobno poklapaju i da su isti sa početnim događajima aktivnosti a₉, a₁₀ i a₁₁, koji se

takođe poklapaju. Aktivnosti a_{12} i a_{13} se neposredno nadovezuju na aktivnosti a_2 i a_9 , odnosno a_8 i a_{10} , pa se njihovi početni događaji završni događaji aktivnostima a_2 i a_9 , odnosno a_8 i a_{10} koji se međusobno poklapaju.

Ovim načinom prikazivanja strukture projekta otklanja se nedostatak tabelarnog (ova nova tabela ima dve kolone i lakša je za prikazivanje).

2. Konstrukcija mrežnog dijagrama

Sledeći deo prve faze, nakon određivanja strukture projekta, je konstrukcija mrežnog dijagrama. Za to postoji više načina. Najviše se koristi postupak da se aktivnosti predstave orijentisanim dužima, čija je orijentacija u meru kazaljke na satu, a događaji se predstavljaju kružićem.



Mrežni dijagram se dobija kada se sve aktivnosti prikažu orijentisanim dužima i događaji kružićima. Događaji koji se poklapaju prikazuju se jednim kružićem. Dužina orijentisanih duži može biti proizvoljna ili proporcionalna vremenu trajanja aktivnosti (ređi slučaj).

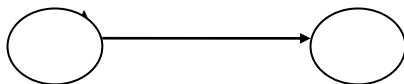
Pored dijagrama u kojima je aktivnost prikazana orijentisanom duži i vreme bročano, postoje dijagrami kod kojih su događaji orijentisani. U takvim dijagramima orijentisana duž predstavlja strukturu projekta. Kružići kojima su predstavljeni događaji sadrže i osnovne informacije o narednoj aktivnosti. Tako događaji postaju orijentisani, tj. opisuju narednu aktivnost.

Sasvim je dozvoljen i jedan i drugi način predstavljanja. Takođe je moguće neke aktivnosti prikazati orijentisanom duži, a druge orijentisanim događajima. Predstavljanje mrežnih dijagrama orijentisanim dužima ima neke prednosti nad dijagramima orijentisanih događaja. Rekli smo da se početni događaji više aktivnosti mogu poklopiti. Kada se radi sa orijentisanim događajima, nije lako jednim kružićem opisati početni događaj svih aktivnosti koje imaju zajednički početni događaj.

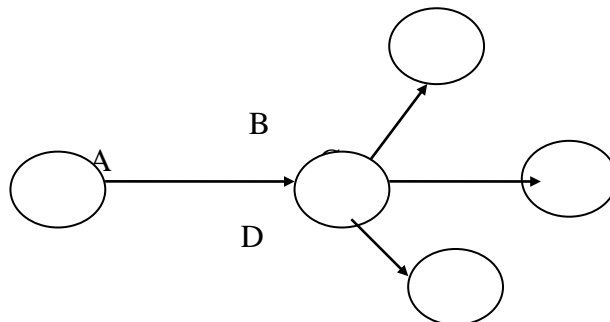
Zato ćemo raditi sa dijagramima sa orijentisanim aktivnostima (dužima).

PRAVILA za crtanje mrežnih dijagrama:

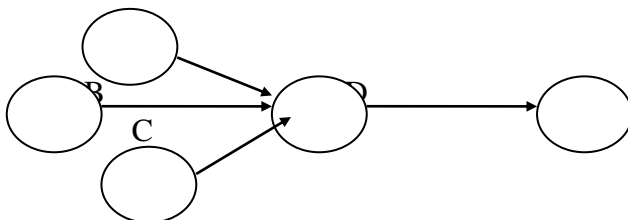
- svaka aktivnost mora da počne i završi događajem



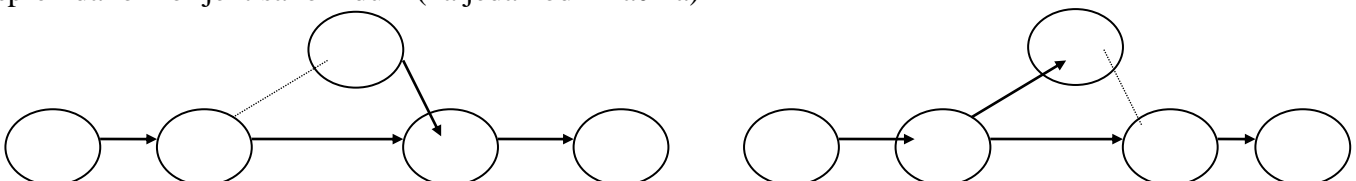
- početni događaj svih aktivnosti koje neposredno slede posle neke aktivnosti poklapaju se sa završnim događajem te aktivnosti

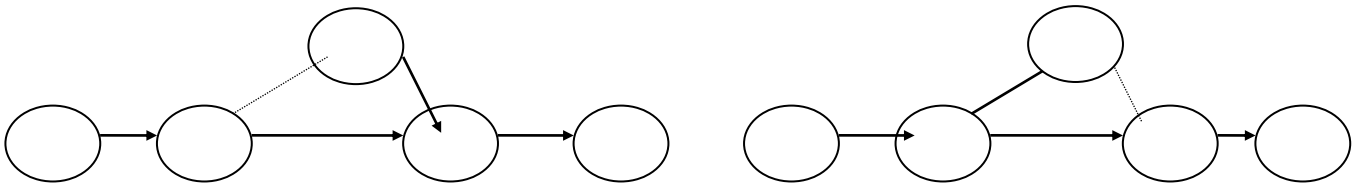


- završni događaj svih aktivnosti koje neposredno prethode nekoj aktivnosti poklapaju se sa početnim događajem te aktivnosti

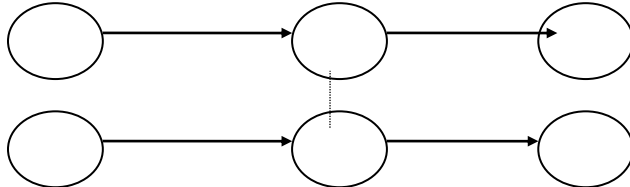


- aktivnosti koje imaju iste početne i završne događaje razdvajaju se uvođenjem fiktivne aktivnosti. Ona se crta isprekidanom orijentisanom duži (na jedan od 4 načina)

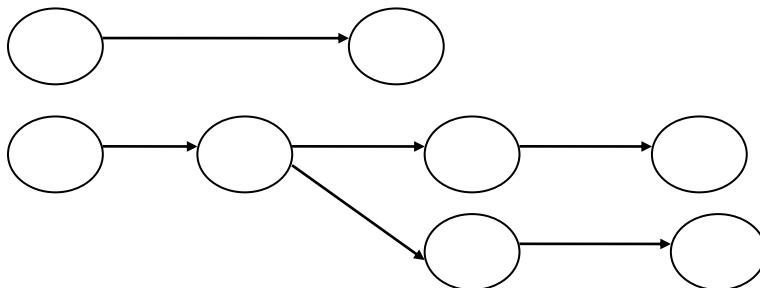




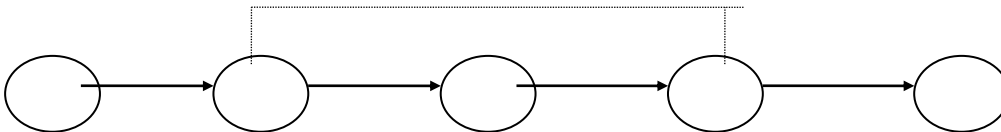
- ako jedna od dve aktivnosti treba da počne pošto se završe druge dve aktivnosti i druga pošto se završi jedna od njih, onda se završni događaj tih aktivnosti povezuje fiktivnom



- ako neka aktivnost može početi pre nego što se druga potpuno završi, vrši se razdvajanje aktivnosti na deo koji se mora završiti i ostalo

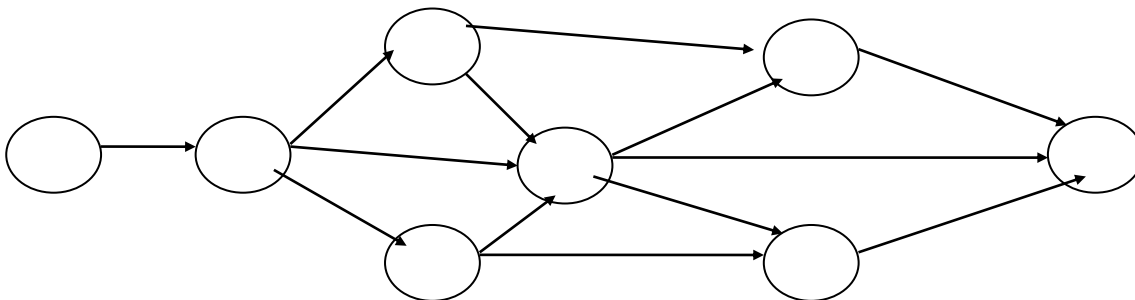


- svaka aktivnost može da se odvoje samo jednom (ovim su izbegnute petlje u mrežnom dijagramu).



(aktivnost E ne može biti definisana, jer bi značilo da se aktivnosti B i C više puta ponavljaju)

Konstrukcija mrežnog dijagrama za prethodni primer:



3. Numeracija na mrežnom dijagramu

U gornjem primeru smo za označavanje aktivnosti koristili slova abcede. To je moguće samo za projekte sa manjim brojem aktivnosti. Moguće je označavanje aktivnosti i nekim slovom i indeksom, kao i numerički (najpogodniji način). Na konstruisanom dijagramu numeracija se može izvršiti dvojako:

- proizvoljno
- u rastućem redosledu

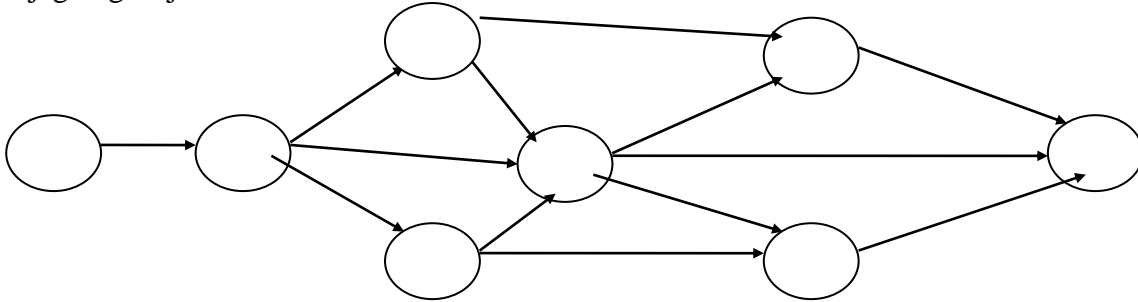
Proizvoljna numeracija je jednostavnija i ne traži posebna pravila, ali veliki nedostatak je taj što se teško mogu pronaći događaji u mreži, teško se kontroliše ispravnost numeracije i teško je kontrolisati dalje faze mrežnog dijagrama.

Numeracija u rastućem redosledu je složenija. Formuliseo ju je FULKERSON. Postoje pravila za tu numeraciju:

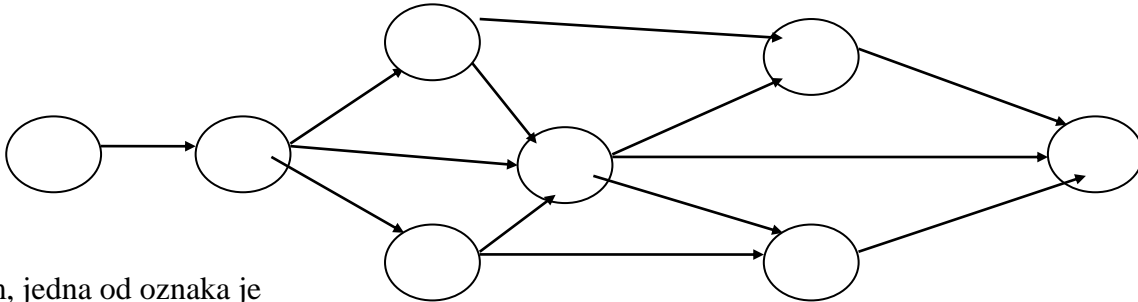
- početni događaj se numerise 0 ili 1
- aktivnosti koje imaju označen početni događaj precrtavaju se
- numeracija neoznačenih događaja se nastavlja sa događajima koji su završni samo precrtanih aktivnosti; ako takvih događaja ima više, numeracija je proizvoljna

Za gornji PRIMER to izgleda:

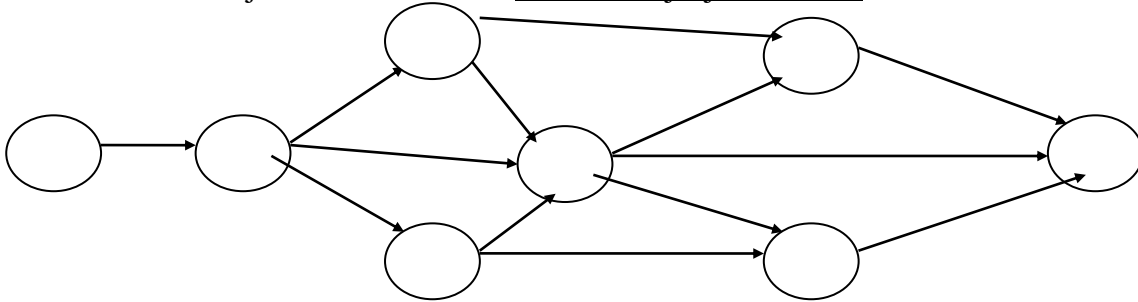
početni događaj aktivnosti A označimo sa 1; zatim primenimo drugo pravilo i precrtamo jedinu aktivnost A čiji je početni događaj označen; završni događaj precrtane aktivnosti A označimo sa 2, čime smo primenili treće pravilo; na osnovu drugog pravila precrtamo aktivnosti B, C i D; završni događaji aktivnosti B i D nisu završni neprecrtanih aktivnosti pa se mogu označiti sa 2 i 3; završni događaj aktivnosti C je završni i za aktivnosti F i I, koje nisu precrtane, pa se ne može označiti; posle označavanja završnih događaja aktivnostima B i D primenimo drugo pravilo; zatim primenimo treće pravilo za oznaku završnih događaja precrtanih aktivnosti i tako sve do poslednjeg događaja.



Najbolje označavanje aktivnosti uzima se označavanje pomoću označenih događaja. Tako aktivnost A ima oznaku A_{12} ili 1-2; B je A_{23} ; C je A_{25} ... Znači, uopšte: A_{ij} , i - predstavlja početni, a j - završni događaj i uvek je $i < j$.



Zatim, jedna od oznaka je da se za aktivnosti na orijentisane duži unose vremena trajanja aktivnosti.



Analiza vremena na mrežnom dijagramu

Sledeća faza mrežnog planiranja je da se na osnovu konstruisanog mrežnog dijagrama analizira vreme događaja i aktivnosti. Poznato je više metoda za to, ali su 2 osnovna: metod kritičnog puta - CPM i PERT - metoda. Ostale metode su definisane za specifične probleme. Metoda CPM se koristi za za projekte sa determinističkim vremenom, a PERT za stohastička vremena trajanja aktivnosti.

Na osnovu mrežnog dijagrama se vidi da neke aktivnosti čine niz, tako da jedna sledi, tj. prethodi drugoj. Tih nizova u mrežnom dijagramu ima više i nazivaju se PUTEVI. Pod putem u mrežnom dijagramu se podrazumeva *niz aktivnosti takvih da se završni događaj neposredno prethodne poklapa sa početnim događajem neposredno naredne aktivnosti*. Oni se mogu odrediti na dva načina:

- preko aktivnosti
- preko označenih događaja (mi ćemo ovo koristiti)

3. ANALIZA VREMENA NA MREŽNOM DIJAGRAMU

Uvod

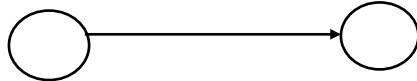
Tehnika mrežnog planiranja (TMP) se zasniva na dve osnovne metode: CPM i PERT. CPM metoda je nešto starija od PERT metode. Planiranje vremena pomoću mrežnog dijagrama izvedeno je prvi put 1957. godine kada je bilo započeto planiranje nekih projekata za hemijsku industriju u Americi (naučnici Y.E.Kottley i R.R.Walker).

Prva faza u primeni TMP, bez obzira o kojoj metodi se radi, je analiza strukture i sastavljanje mrežnog dijagrama. Pri tome, pod analizom strukture podrazumevamo uspostavljanje logičkog redosleda i međusobne zavisnosti pojedinih aktivnosti koje treba izvršiti u okviru nekog projekta. Druga faza je analiza vremena koje se kod CPM i PERT metode razlikuju. Naime, vremena aktivnosti mogu biti poznata, tj. deterministička (kod CPM metode) i poznata s određenom verovatnoćom, tj. stohastička (kod PERT metode).. Znači, priroda vremena (determinističko i stohastičko) određuje i postupke za njegovu analizu. Tako za projekte sa determinističkim vremenom koristi se metod kritičnog puta (CPM), a za stohastička vremena trajanja aktivnosti - PERT metoda.

Analiza vremena po metodi kritičnog puta (CPM - Critical Path Method)

Svaka aktivnost zahteva određena sredstva i vreme. Vreme izvršenja jednog projekta predstavlja zbir vremena trajanja određenog tehnološki uslovljenog niza aktivnosti. Treba reći i to da pri analizi vremena uvek se operiše jednom vremenskom jedinicom za sve aktivnosti (dan, nedelja ili mesec - najčešće dan).

Ako početni događaj aktivnosti označimo sa "i", a završni sa "j", oznaka t_{ij} predstavlja trajanje jedne aktivnosti. Znači, vreme početka jedne aktivnosti je označeno sa t_i , a vreme završetka sa t_j . Na osnovu toga se aktivnost prikazuje na sledeći način:



Međutim, početak, odnosno završetak neke aktivnosti ne mora da bude uslovljen jednom vremenskom tačkom. Naime, sledeća aktivnost može da započne ranije ili kasnije od prethodne aktivnosti. To znači da tehnološke zavisnosti aktivnosti i planirani projekti mogu dozvoljavati određeno pomeranja u vremenu i to kako kod početka, tako i kod završetka aktivnosti. Iz te činjenice su proizašli i sledeći pojmovi - najranije vreme ostvarenja događaja, najkasnije vreme ostvarenja aktivnosti događaja i vremenska rezerva (zazor).

Analiza vremena na mrežnom dijagramu obuhvata:

1. analizu vremena trajanja puta
2. analizu vremena događaja
3. analizu vremena aktivnosti

1. Analiza vremena trajanja puta

Na osnovu mrežnog dijagrama vidi se da neke aktivnosti čine niz, tako da jedna sledi, odnosno prethodi drugoj. Tih nizova u mrežnom dijagramu ima više i poznati su kao putevi. Pod putem u mrežnom dijagramu se podrazumeva niz aktivnosti takvih da se završni događaj neposredno prethodne poklapa s početnim događajem neposredno naredne aktivnosti.

Osim ove definicije, putevi se mogu odrediti i preko događaja na sledeći način: neka je izvršena numeracija događaja u mrežnom dijagramu; za događaje i i j kažemo da su susedni, tj. da i-ti neposredno prethodi j-tom ili j-ti neposredno sledi i-tom, ako postoji aktivnost kojoj je i-ti događaj početni i j-ti završni događaj. Pri tome za susedne događaje važi relacija $i < j$.

Pošto smo na ovaj način definisali susedne, odnosno neposredno prethodni ili ineposredno naredni, put u mreži se može definisati kao niz događaja takvih da svaki naredni događaj neposredno sledi prethodnom, tj. da svaki prethodni neposredno prethodi narednom događaju. Ova definicija potpuno identifikuje puteve u mrežnom dijagramu.

Znači, putevi u mrežnom dijagramu mogu biti:

- put koji počinje početni događaj projekta i završava j-ti (t_{ij})
- put koji počinje i-tim i završava završnim događajem projekta (t_{in})
- put koji počinje i-tim i završava j-tim događajem mrežnog dijagrama (t_{ij})
- put koji počinje i završava završnim događajem projekta (t_{in})

Putevi koji povezuju početni i završni događaj projekta nazivaju se potpuni putevi. Potpuni putevi sa najdužim vremenom trajanja su kritični putevi. Oni određuju dužinu trajanja projekta. Aktivnosti koje formiraju kritični put su kritične aktivnosti, a događaji - kritični događaji. Upravo zato što kritični put i aktivnosti koje ga formiraju moraju biti praćene s posebnom pažnjom, analiza vremena je i dobila naziv - metod kritičnog puta.

Znači, kritični put je niz međusobno povezanih aktivnosti koje se protežu između početnog i završnog događaja mrežnog dijagrama, a imaju ukupno najduže vreme trajanja. Ili, to je niz kritičnih aktivnosti između početka i završetka nekog projekta.

Za kritične aktivnosti možemo da kažemo da su to aktivnosti kod kojih odlaganje početka te aktivnosti može izazvati odlaganje završetka celog projekta. I upravo zbog toga je veoma važno da se uvek odredi kritični put.

Potpuni putevi u mrežnom dijagramu ne moraju imati jednaka vremena. Razlika vremena potpunih puteva s najdužim vremenom i vreme trajanja nekog potpunog puta je poznata kao rezerva vremena posmatranog puta. Šta znači ta rezerva? Ta rezerva znači za koliko se mogu uvećati vremena trajanja aktivnosti nekog potpunog puta da se ne naruši ukupno vreme trajanja projekta.

2. Analiza vremena događaja

Rekli smo da događaj predstavlja trenutke završetka, odnosno početka neke ili nekih aktivnosti. Upravo zbog toga je bitno kada će se oni ostvariti, tj. kada će se neke aktivnosti završiti, odnosno početi. Prvo, rekli smo da jedan događaj može predstavljati završni događaj više aktivnosti, pa njegovo ostvarenje zavisi od vremena tih i njima prethodnih aktivnosti. Drugo, ostvarenje nekog događaja treba da obezbedi realizaciju aktivnosti koje povezuju taj događaj sa završnim događajem čitavog projekta. Prvi uslov određuje najranije, a drugi najkasnije vreme ostvarenja događaja.

a) Određivanje najranijeg vremena ostvarenja događaja (ES_j - earliest starting)

Ako najranije vreme početka aktivnosti, tj. početni događaj označimo sa ES , a sa t_{ij} vreme odigravanja aktivnosti, onda za j-ti događaj najranije vreme možemo napisati kao:

$$ES_j = \max_i(ES_i + t_{ij})$$

za sve aktivnosti i-j, gde je ES_i najranije vreme odvijanja događaja i, a ES_j vreme kada se ta aktivnost može najranije završiti.

Odnosno:

$$ES_j = \max(ES_{i_1} + t_{i_1j}, ES_{i_2} + t_{i_2j}, \dots, ES_{i_r} + t_{i_rj}, \\ j = 2, 3, \dots, n \\ i_1, i_2, \dots, i_r < j$$

Najranije vreme ostvarenja početnog događaja je: $ES_1 = 0$ ili

$$ES_j = \max(ES_k + t_{kj})$$

$$j = 2, 3, \dots, n$$

$$k = i_1, i_2, \dots, i_r < j$$

Najranije vreme ostvarenja početnog događaja je: $ES_1 = 0$

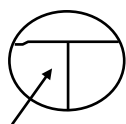
Ovo znači sledeće:

(predstavljanje najranijeg vremena ostvarenja događaja u mrežnom dijagramu)

Određivanje najranijeg vremena događaja prema gornjoj definiciji nije jednostavno, jer treba izdvojiti sve puteve koji povezuju početni s j-tim događajem. Da bi se to izbeglo, primenjuje se iterativni postupak. Njime se najranija vremena nekog događaja određuju preko najranijih vremena prethodnih događaja. Zato je postupak određivanja najranijeg vremena poznat kao analiza vremena unapred.

Najranije ostvarenje svih aktivnosti čiji je to početni događaj je zbir tog vremena i trajanja aktivnosti. Najranije vreme narednih događaja se dobija ako se na najranije vreme prethodnih doda vreme trajanja aktivnosti. Taj postupak se ponavlja sve do završnog događaja projekta. Pošto neki događaj može da ima više prethodnih, to i njegovo najranije vreme zavisi od svih njih.

Ako događaj predstavljamo na sledeći način:



ES_j izračunata vremena upisujemo u levu stranu trećine kruga.

b) Određivanje najkasnijeg vremena ostvarenja događaja (LC_i - latest completion time)

Na osnovu najranijeg vremena završnog događaja projekta, vreme realizacije projekta je određeno. Početni događaji aktivnosti moraju se tako ostvariti da se ne ugrozi ostvarenje celog projekta. Trenutak kada moraju da počnu aktivnosti, da se ne ugrozi ostvarenje projekta je poznato kao najkasnije ostvarenje događaja.

I-ti događaj iz mrežnog dijagrama povezuje više puteva sa završnim događajem. Taj događaj se može ostvariti tako da se ostvare svi putevi do završnog, pa i onaj sa najdužim vremenom.

Za najkasnije vreme ostvarenja i-tog događaja uzima se:

$$LC_i = \min(LC_j - t_{ij})$$

j

za sve aktivnosti i -j. Odnosno:

$$LC_i = \min(LC_{j1} - t_{ij1}, LC_{j2} - t_{ij2}, \dots, LC_{js} - t_{ijs},$$

$$i = n-1, n-2, \dots, 1$$

$$i < j_1, j_2, \dots, j_s$$

$$\text{Za zadnji događaj } i = n: LC_n = ES_n$$

Za najduži put, LC je najmanje ili

$$LC_j = \min(LC_k - t_{jk})$$

$$i = n-1, n-2, \dots, 1$$

$$k = j_1, j_2, \dots, j_s > 1$$

$$\text{Za zadnji događaj } i = n: LC_n = ES_n$$

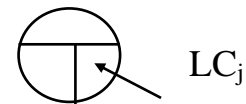
Za najduži put, LC je najmanje

Ovo znači sledeće:

(predstavljanje najkasnijeg vremena ostvarenja događaja u mrežnom dijagramu)

Pošto određivanje najkasnijeg vremena prema gornjoj definiciji nije jednostavno, jer treba formirati veliki broj puteva, jednostavnije je to uraditi iterativnim postupkom. To znači, najksanija vremena ostvarenja početnog događaja aktivnosti koje prethode onima čija su vremena određena dobijaju se kada se od tih vremena oduzmu vremena trajanja aktivnosti. Taj postupak se nastavlja do početnog. Zato je postupak određivanja najksanijeg vremena poznat kao analiza vremena unazad.

Izračunata vremena se upisuju u desnu stranu trećine kruga.



c) Određivanje vremenske rezerve (TF_{ij})

Najranije vreme ostvarenja događaja znači trenutak kada se sve aktivnosti, čiji je to završni događaj, mogu završiti.

Najksnije vreme ostvarenja istog događaja predstavlja trenutak kada moraju početi sve aktivnosti, čiji je to početni događaj.

Ta dva vremena moraju zadovoljiti relaciju:

$$ES_i \leq LC_i$$

Negativna razlika:

$$TF_{ij} = LC_i - ES_i$$

je poznata kao vremenska rezerva događaja (zazor).

To je vreme za koje se završni događaj svih aktivnosti, koje se tu završavaju, može pomeriti, odnosno uvećati trajanje tih aktivnosti. Ona se može koristiti i za pomeranje početnog događaja aktivnosti, odnosno za uvećanje njihovog trajanja.

Za događaj koji leži na kritičnom putu vremenska rezerva je jednaka nuli. To su kritični događaji. Veza između kritičnih događaja i aktivnosti može biti sledeća:

- početni i završni događaji su kritični
- početni događaj je kritičan i završni nekritičan
- početni događaj je nekritičan i završni je kritičan
- početni i završni događaji su nekritični

Događaj pripada kritičnom putu ako je:

$$ES_i = LC_i$$

Uslov da aktivnost pripada kritičnom putu je:

$$LC_j - ES_i - t_{ij} = 0$$

Napomena:

Analiza vremena mrežnog dijagrama može se završiti određivanjem najranijeg i najkasnijeg vremena i vremenskih rezervi događaja. Za detaljniju analizu je potrebno analizirati i vremena aktivnosti.

3. Analiza vremena aktivnosti

Analizom vremena ostvarenja događaja, formira se slika o realizaciji projekta. Ali, najranija i najkasnija vremena ostvarenja događaja ne određuju koja aktivnost mora da počne sa tim vremenom ili kada će se koja aktivnost završiti. Najranija i najkasnija vremena daju interval u kome se moraju odvijati određene aktivnosti.

Za svaku aktivnost možemo odrediti:

- a)- najraniji početak aktivnosti
- b)- najkasniji početak aktivnosti
- c)- najraniji završetak aktivnosti
- d)- najkasniji završetak aktivnosti
- e)- vremenske rezerve aktivnosti

f)- kritične aktivnosti

a) Aktivnost čiji je početni događaj i , **najranije može početi** kada se najranije može ostvariti taj događaj, odnosno: $Et_{ij} = ES_i$

b) **Najkasnije vreme ostvarenja** j -tog događaja je LC_j . To je vreme kada se moraju završiti sve aktivnosti čiji je to završni događaj. Da bi se to postiglo, aktivnost mora početi t_{ij} vremenskih jedinica ranije. To je najkasniji početak aktivnosti, odnosno: $LS_{ij} = LC_j - t_{ij}$

Aktivnosti čiji je završni događaj j , mogu imati različite najkasnije početke. Oni su isti ako su vremena trajanja aktivnosti ista.

Najkasniji početak aktivnosti je veoma bitan u realizaciji projekta, jer obezbeđuje da se projekat završi u određenom roku.

c) Aktivnost može započeti najranije sa **najranijim** ostvarenjem početnog događaja i . Ako je tako počela, njen najraniji završetak se može očekivati posle t_{ij} vremenskih jedinica, odnosno: $EC_{ij} = ES_i + t_{ij}$

Najraniji završeci aktivnosti čiji je početni događaj i su međusobno različiti. Oni su jednaki samo za aktivnosti čija su vremena trajanja jednaka.

d) Aktivnost se mora završiti sa **najkasnijim vremenom** ostvarenja njenog završnog događaja, odnosno: $Lt_{ij} = LC_j$

e) **Vremenska rezerva događaja** ukazuje da događaj nije kritičan. Ona je definisana kao razlika između dva moguća vremena događaja. Međutim, za aktivnosti ima više vremena, pa time i više vremenskih rezervi:

- ukupna vremenska rezerva

- slobodna vremenska rezerva

- nezavisna vremenska rezerva

Ukupna vremenska rezerva (razlika) između najkasnijeg trenutka početka aktivnosti i najranijeg završetka aktivnosti.. To nije zbir posebnih vremenskih rezervi, već je to veličina za koju se može odložiti trenutak završetka svih aktivnosti, a da to ne utiče na trajanje tih aktivnosti.

Ako sa LS_{ij} označimo najkasniji početak i EC_{ij} - najraniji završetak aktivnosti, tj.

$$LS_{ij} = LC_j - t_{ij}$$

$$EC_{ij} = ES_i + t_{ij}$$

Ukupnu vremensku rezervu definišemo kao razliku između maksimalnog vremena za izvođenje aktivnosti i vremena trajanja:

(total float)

$$TF_{ij} = LC_j - ES_i - t_{ij} = LC_j - EC_{ij} = LS_{ij} - ES_i$$

jer je:

$$EC_{ij} = ES_i + t_{ij}; \quad LS_{ij} = LC_j - t_{ij}$$

Ona je negativna i ukazuje za koliko se može uvećati vreme trajanja aktivnosti pod uslovom da se ne ugrozi realizacija projekta u predviđenom roku.

Slobodna vremenska rezerva je maksimalno vreme za koje možemo produžiti trajanje neke aktivnosti, a da se pri tome ne promeni najraniji početak narednih aktivnosti.

(free float)

$$FF_{ij} = ES_j - ES_i - t_{ij} = ES_j - EC_{ij}$$

gde je $ES_i - t_{ij} = EC_{ij}$

Ona ne uključuje vremenske rezerve završnog događaja, kao ni vremenske rezerve početnog događaja, čime je otklonjen nedostatak ukupne vremenske rezerve.

Nezavisna vremenska rezerva - ukupna i slobodna vremenska rezerva uslovljavaju da se prethodne ili naredne aktivnosti završe, odnosno otpočnu tako da se ne ugroze te rezerve. Ali, time se ugrožavaju vremena prethodnih ili narednih aktivnosti. Zato se uvodi nezavisna vremenska rezerva. Ona se definiše preko najranijeg vremena ostvarenja završnog i najkasnijeg vremena ostvarenja početnog događaja.

f) Određivanje kritičnih aktivnosti

Određujemo kritične aktivnosti, a time i kritični put. Za Kritične aktivnosti važi sledeće:

- $ES_i = LC_i$ kod početnog događaja najraniji početak ravan je najkasnijem završetku

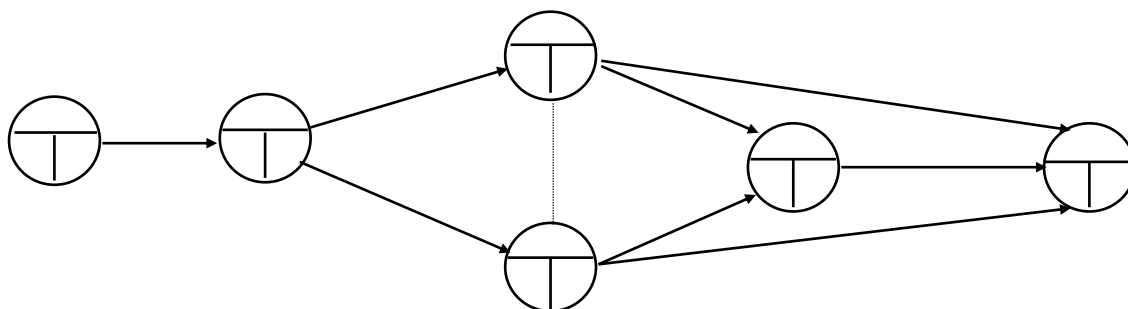
- $ES_j = LC_j$ kod završnog događaja

- $ES_j - ES_i = LC_j - LC_i = t_{ij}$ znači da je vreme trajanja aktivnosti vreme od najranijeg početka do najranijeg završetka aktivnosti.

Ovi uslovi znače da nema nikakve vremenske rezerve između najranijeg i najkasnijeg početka, odnosno najranijeg i najkasnijeg završetka aktivnosti. To praktično znači da su vremena u levoj i desnoj trećini ista.

1. PRIMER

Nacrtajmo mrežni dijagram sledećeg oblika. Neka su vremena trajanja aktivnosti upisana iznad tih aktivnosti.



1. postavka

	posmatrane aktivn.	prethodne aktivn.	trajanje
1.	A	-	3
2.	B	A	2
3.	C	A	3
4.	D	B C	7
5.	E	C	3
6.	F	B	5
7.	G	C	2
8.	H	D E	6

2.postavka

	posmatrane aktivn.	koje neposr. slede	trajanje
1.	A	B C	3
2.	B	D F	2
3.	C	D E F	3
4.	D	H	7
5.	E	H	3
6.	F	-	5
7.	G	-	2
8.	H	-	6

Analiza vremena događaja

1. Najranije vreme završetka događaja:

$$ES_1 = 0$$

$$ES_2 = \max(ES_1 + t_{12}) = \max(0 + 3) = 3$$

$$ES_3 = \max(ES_2 + t_{23}) = \max(3 + 3) = 6$$

$$ES_4 = \max(ES_2 + t_{24}) = \max(3 + 2) = 5$$

Postoji fiktivna aktivnost između 3 i 4, pa je:

$$ES_4 = \max(ES_3 + t_{34}) = \max(6 + 0) = 6 \text{ (ona je veća i bira se)}$$

$$ES_5 = \max(ES_4 + t_{45}; ES_3 + t_{35}) = \max(6 + 7; 6 + 3) = 13$$

$$ES_6 = \max(ES_4 + t_{46}; ES_5 + t_{56}; ES_3 + t_{36}) = \max(6 + 5; 13 + 6; 6 + 2)$$

$$= \max(11; 19; 8) = \underline{19}$$

Na osnovu najranijeg vremena završnog događaja ES_6 vidi se da projekat traje 19 vremenskih jedinica.

2. Najkasnije vreme ostvarenja događaja:

$$LC_6 = 19 = ES_6$$

$$LC_5 = \min(LC_6 - t_{65}) = \min(19 - 6) = 13$$

$$LC_4 = \min(LC_6 - t_{64}; LC_5 - t_{54};) = \min(19 - 5; 13 - 7) = 6$$

$$LC_3 = \min(LC_6 - t_{63}; LC_5 - t_{53}; LC_4 - t_{43};) = \min(19 - 2; 13 - 3; 6 - 0) = \min(11; 10; 6) = 6$$

$$LC_2 = \min(LC_4 - t_{42}; LC_3 - t_{32};) = \min(6 - 2; 6 - 3) = 3$$

$$LC_1 = \min(LC_2 - t_{21}) = \min(3 - 3) = 0$$

Prema slici, potpuni putevi u mreži sa njihovim vremenima su:

- (12) (23) (36)	$t_{12} + t_{23} + t_{36} = 3+3+2 = 8$
- (12) (23) (35) (56)	$t_{12} + t_{23} + t_{35} + t_{56} = 3 + 3+3+6= 15$
- (12) (24) (45) (56)	$t_{12} + t_{24} + t_{45} + t_{56} = 3+2+7+6= 18$
- (12) (24) (46)	$t_{12} + t_{24} + t_{46} = 3+2+5= 10$
- (12) (23) (34) (46)	$t_{12} + t_{23} + t_{34} + t_{46} = 2+3+0+5= 10$
- (12) (23) (34) (45) (56)	$t_{12} + t_{23} + t_{34} + t_{45} + t_{56} = 3+3+0+7+6 = \underline{19}$

kritični put

Kritični događaji: 1 2 3 4 5 6

Kritični put je potpuni put sa najdužim vremenom trajanja. Određuje dužinu trajanja projekta. Potpuni putevi su oni koji povezuju početni i završni događaj.

3. Vremenska rezerva događaja

$$TF_1 = LC_1 - ES_1 = 0 - 0 = 0$$

$$TF_2 = LC_2 - ES_2 = 3 - 3 = 0$$

$$TF_3 = LC_3 - ES_3 = 6 - 6 = 0$$

$$TF_4 = LC_4 - ES_4 = 6 - 6 = 0$$

$$TF_5 = LC_5 - ES_5 = 13 - 13 = 0$$

$$TF_6 = LC_6 - ES_6 = 19 - 19 = 0$$

4. Koji događaji pripadaju kritičnom putu

- npr. za događaj (1)

I uslov (za početni događaj najraniji početak jednak je najkasnijem završetku)

$$ES_i = LC_i$$

$$ES_1 = 0$$

$$LC_1 = 0$$

II uslov (za završni događaj)

$$ES_j = LC_j$$

$$ES_6 = 19$$

$$LC_6 = 19$$

III uslov (vreme trajanja aktivnosti je ono između najranijeg početka i najranijeg završetka)

$$ES_j - ES_i = LC_j - LC_i = t_{ij}$$

$$ES_1 = 0$$

$$ES_6 = 19$$

$$LC_1 = 0$$

$$LC_6 = 19$$

$$t_{12} + t_{23} + t_{34} + t_{45} + t_{56} = 3+3+0+7+6 = \underline{19}$$

- Isti je postupak za sve ostale događaje, bilo da pripadaju ili ne pripadaju kritičnom putu.

5. Pojedinačno ispitivanje aktivnosti da li ispunjavaju uslove

- npr. za aktivnosti (12) (23) (34) (45) (56), koje pripadaju kritičnom putu

I uslov:

$$ES_i = LC_i \quad \text{ispunjava uslov}$$

$$ES_1 = 0$$

$$LC_1 = 0$$

II uslov:

$$ES_j = LC_j$$

$$ES_6 = 19 \quad \text{ispunjava uslov}$$

$$LC_6 = 19$$

III uslov:

$$ES_j - ES_i = LC_j - LC_i = t_{ij}$$

$$ES_6 = 19$$

$$ES_1 = 0$$

$$LC_1 = 0$$

$$LC_6 = 19$$

$$t_{12} + t_{23} + t_{34} + t_{45} + t_{56} = 3+3+0+7+6 = \underline{19}$$

ispunjava uslov,
aktivnost je kritična

- za aktivnost (12) (24) (46)

I uslov:

$$ES_i = LC_i \quad \text{ispunjava uslov}$$

$$ES_1 = 0$$

$$LC_1 = 0$$

II uslov:

$$ES_j = LC_j$$

$$ES_6 = 19 \quad \text{ispunjava uslov}$$

$$LC_6 = 19$$

III uslov:

$$ES_j - ES_i = LC_j - LC_i = t_{ij}$$

$$ES_6 = 19$$

$$ES_1 = 0$$

$$LC_1 = 0$$

$$LC_6 = 19$$

$$t_{12} + t_{24} + t_{46} = 3+2+5 = 10 \neq 19$$

ne ispunjava uslov

- za aktivnost (12) (23) (36)

I uslov:

$$ES_i = LC_i \quad \text{ispunjava uslov}$$

$$ES_1 = 0$$

$$LC_1 = 0$$

II uslov:

$$ES_j = LC_j$$

$$ES_6 = 19 \quad \text{ispunjava uslov}$$

$$LC_6 = 19$$

III uslov:

$$ES_j - ES_i = LC_j - LC_i = t_{ij}$$

$$ES_6 = 19$$

$$ES_1 = 0$$

$$LC_1 = 0$$

$$LC_6 = 19$$

$$t_{12} + t_{24} + t_{46} = 3+3+2 = 8 \neq 19$$

ne ispunjava uslov

aktivnost nije kritična

6. Određivanje vremenskih rezervi aktivnosti

1. Ukupna

$$TF_{12} = LC_2 - ES_1 - t_{12} = 3-0-3=0$$

$$TF_{23} = LC_3 - ES_2 - t_{23} = 6-3-3=0$$

$$TF_{24} = LC_4 - ES_2 - t_{24} = 6-3-2=1$$

$$TF_{34} = LC_4 - ES_3 - t_{34} = 6-6-0=0$$

$$TF_{35} = LC_5 - ES_3 - t_{35} = 13-6-3=4$$

$$TF_{45} = LC_5 - ES_4 - t_{45} = 13-6-7=0$$

$$TF_{36} = LC_6 - ES_3 - t_{36} = 19-6-2=11$$

$$TF_{45} = LC_5 - ES_4 - t_{45} = 13-6-7=0$$

$$TF_{46} = LC_6 - ES_4 - t_{46} = 19-6-5=8$$

$$TF_{56} = LC_6 - ES_5 - t_{56} = 19-13-6=0$$

2. Slobodna vremenska rezerva

$$FF_{12} = ES_2 - ES_1 - t_{12} = 3-0-3=0$$

$$FF_{23} = ES_3 - ES_2 - t_{23} = 6-3-3=0$$

$$FF_{24} = ES_4 - ES_2 - t_{24} = 6-3-2=1$$

$$FF_{34} = ES_4 - ES_3 - t_{34} = 6-6-0=0$$

$$FF_{35} = ES_5 - ES_3 - t_{35} = 13-6-3=4$$

$$FF_{45} = ES_5 - ES_4 - t_{45} = 13-6-7=0$$

$$FF_{36} = ES_6 - ES_3 - t_{36} = 19-6-2=11$$

$$FF_{45} = ES_5 - ES_4 - t_{45} = 13-6-7=0$$

$$FF_{46} = ES_6 - ES_4 - t_{46} = 19-6-5=8$$

$$FF_{56} = ES_6 - ES_5 - t_{56} = 19-13-6=0$$

2. PRIMER

Analizom strukture projekta ustanovljena su osnovna svojstva aktivnosti na projektu, data u tabeli.

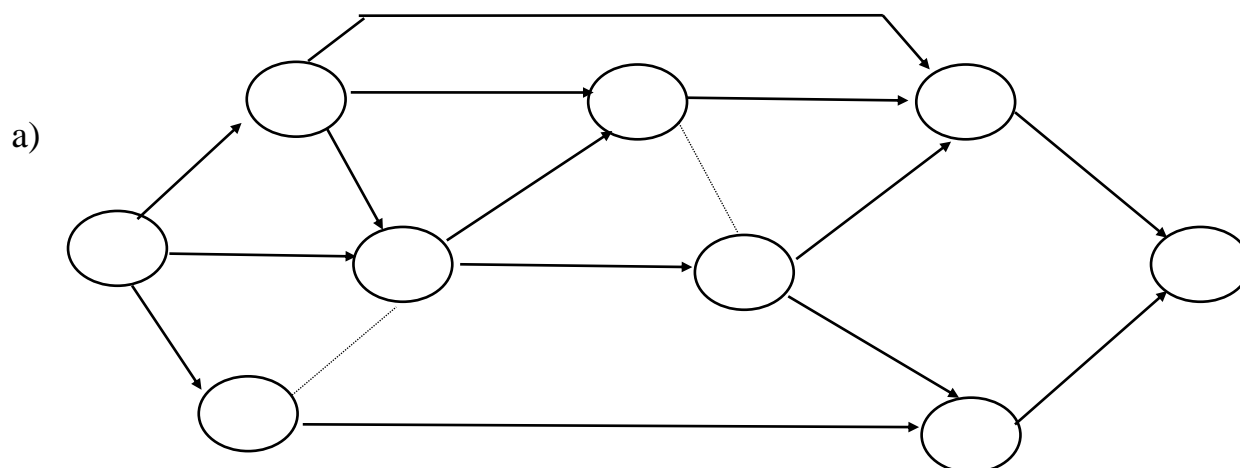
1. postavka

	posmatrane aktivn.	prethodne aktivn.	trajanje
1	A	-	5
2	B	-	2
3	C	-	4
4	D	A	4
5	E	A	3
6	F	A	8
7	G	C	10
8	H	B,C,F	4
9	I	B,C,F	5
10	J	E,H	3
11	K	E,H,I	1
12	L	E,H,I	5
13	M	D,J,K	4
14	N	G,L	2

2.postavka

	posmatrane aktivn.	koje neposr.slede	trajanje
1	A	E D F	5
2	B	H I	2
3	C	I G	4
4	D	M	4
5	E	J K	3
6	F	H I	8
7	G	N	10
8	H	J K	4
9	I	K L	5
10	J	M	3
11	K	M	1
12	L	N	5
13	M	-	4
14	N	-	2

- a) Konstruisati mrežni dijagram i numerisati događaje prema pravilima Fulkerson-a
 b) Izvršiti analizu vremena



b)

Analiza za događaj:Najranije vreme ostvarenja događaja

$$ES_1 = 0$$

$$ES_2 = \max(ES_1 + t_{12}) = \max(0+5)=5$$

$$ES_3 = \max(ES_1 + t_{13}) = \max(0+4)=4$$

$$ES_4 = \max(ES_1 + t_{14}; ES_2 + t_{24}; ES_3 + t_{34}) = \max(0+2; 5+8; 4+0)=13$$

$$ES_5 = \max(ES_2 + t_{25}; ES_4 + t_{45}) = \max(5+3; 13+4)=17$$

$$ES_6 = \max(ES_4 + t_{46}; ES_5 + t_{56}) = \max(13+5; 17+0)=18$$

$$ES_7 = \max(ES_5 + t_{57}; ES_6 + t_{67}) = \max(17+3; 18+1)=20$$

$$ES_8 = \max(ES_3 + t_{38}; ES_6 + t_{68}) = \max(4+10; 18+5)=23$$

$$ES_9 = \max(ES_7 + t_{79}; ES_8 + t_{89}) = \max(20+4; 23+2)=25$$

Najkasnije vreme ostvarenja događaja

$LC_9 = ES_9 = 25$ ukupno vreme odigravanja zadnjeg događaja je
trajanje projekta

$$LC_8 = \min(LC_9 - t_{89}) = \min(25-2)=23$$

$$LC_7 = \min(LC_9 - t_{79}) = \min(25-4)=21$$

$$LC_6 = \min(LC_8 - t_{68}; LC_7 - t_{67}) = \min(23-5; 21-1)=18$$

$$LC_5 = \min(LC_7 - t_{57}; LC_6 - t_{56}) = \min(21-3; 18-0)=18$$

$$LC_4 = \min(LC_6 - t_{46}; LC_5 - t_{45}) = \min(18-5; 18-4)=13$$

$$LC_3 = \min(LC_8 - t_{38}; LC_4 - t_{34}) = \min(23-10; 13-0)=13$$

$$LC_2 = \min(LC_4 - t_{24}; LC_7 - t_{27}) = \min(13-8; 21-4)=5$$

$$LC_1 = \min(LC_3 - t_{13}; LC_4 - t_{14}; LC_2 - t_{12}) = \min(13-4; 13-2; 5-5)=0$$

Vremenska rezerva događaja

$$TF_1 = LC_1 - ES_1 = 0-0=0$$

$$TF_2 = LC_2 - ES_2 = 5-5=0$$

$$TF_3 = LC_3 - ES_3 = 13-4=9$$

$$TF_4 = LC_4 - ES_4 = 13-13=0$$

$$TF_5 = LC_5 - ES_5 = 18-17=1$$

$$TF_6 = LC_6 - ES_6 = 18-18=0$$

$$TF_7 = LC_7 - ES_7 = 21-20=1$$

$$TF_8 = LC_8 - ES_8 = 23-23=0$$

$$TF_9 = LC_9 - ES_9 = 25-25=0$$

Kritični put - potpuni putevi sa njihovim vremenima su:

$$(12) (27) (79) \quad t_{12} + t_{27} + t_{79} = 5+4+4=13$$

$$(12) (25) (57) (79) \quad t_{12} + t_{25} + t_{57} + t_{79} = 5+3+3+4=16$$

$$(12) (24) (45) (57) (79) \quad t_{12} + t_{24} + t_{45} + t_{57} + t_{79} = 5+8+4+3+4=24$$

$$(12) (24) (45) (56) (67) (79) \quad = 5+8+4+0+1+4=22$$

$$(12) (24) (45) (56) (68) (89) \quad = 5+8+4+0+5+2=24$$

$$(12) (24) (46) (67) (79) \quad = 5+8+5+1=23$$

$$(12) (24) (46) (68) (89) \quad = 5+8+5+5+2=\underline{25}$$

$$(13) (34) (45) (57) (79) \quad = 4+0+4+3+4=15$$

$$(13) (34) (45) (56) (67) (79) \quad = 4+0+4+0+1+4=13$$

$$(13) (34) (45) (56) (68) (89) \quad = 4+0+4+0+5+2=15$$

$$(13) (38) (89) \quad = 4+10+2=16$$

Kritični put čine događaji: 1 2 4 6 8 9

Koji događaji pripadaju kritičnom putu:

npr. za događaj 1:

I uslov:

$$ES_i = LC_i$$

(za početni događaj je najraniji početak = najkasnijem završetku)

$$ES_1 = 0$$

$$LC_1 = 0$$

II uslov: (za završni događaj)

$$ES_j = LC_j$$

$$ES_9 = 25$$

$$LC_9 = 25$$

III uslov:

(vreme trajanja je ono između najranijeg početka i najkasnijeg završetka)

$$ES_j - ES_i = LC_j - LC_i = t_{ij}$$

$$ES_9 = 25$$

$$ES_1 = 0$$

$$LC_1 = 0$$

$$LC_9 = 25$$

$$t_{19} = 5 + 8 + 5 + 5 + 2 = 25$$

Isti je postupak za sve ostale događaje, bilo da pripadaju ili ne pripadaju kritičnom putu.

Koje aktivnosti pripadaju kritičnom putu:

npr. za aktivnost (12) (27) (79)

I uslov:

$$ES_i = LC_i \quad \text{ispunjava uslov}$$

$$ES_1 = 0$$

$$LC_1 = 0$$

II uslov:

$$ES_j = LC_j$$

$$ES_9 = 25 \quad \text{ispunjava uslov}$$

$$LC_9 = 25$$

III uslov:

$$ES_j - ES_i = LC_j - LC_i = t_{ij}$$

$$ES_9 = 25$$

$$ES_1 = 0$$

$$LC_1 = 0$$

$$LC_9 = 25$$

$$t_{19} = t_{12} + t_{27} + t_{79} = 5 + 4 + 4 = 13 \neq 25 \quad \text{ne ispunjava uslov,}$$

aktivnost nije kritična

npr. za aktivnost (13) (38) (89)

I uslov:

$$ES_i = LC_i \quad \text{ispunjava uslov}$$

$$ES_1 = 0$$

$$LC_1 = 0$$

II uslov:

$$ES_j = LC_j$$

$$ES_9 = 25 \quad \text{ispunjava uslov}$$

$$LC_9 = 25$$

III uslov:

$$ES_j - ES_i = LC_j - LC_i = t_{ij}$$

$$ES_9 = 25$$

$$ES_1 = 0$$

$$LC_1 = 0$$

$$LC_9 = 25$$

$$t_{19} = 4 + 10 + 2 = 18 \neq 25$$

ne ispunjava uslov,
aktivnost nije kritična

Analiza vremena aktivnosti

Najraniji početak aktivnosti

$$Et_{ij} = ES_i$$

$$Et_{12} = ES_1 = 0$$

$$Et_{13} = ES_1 = 0$$

$$Et_{14} = ES_1 = 0$$

$$Et_{24} = ES_2 = 5$$

$$Et_{27} = ES_2 = 5$$

$$Et_{34} = ES_3 = 4$$

$$Et_{25} = ES_2 = 5$$

$$Et_{45} = ES_4 = 13$$

$$Et_{46} = ES_4 = 13$$

$$Et_{38} = ES_3 = 4$$

$$Et_{56} = ES_5 = 17$$

$$Et_{57} = ES_5 = 17$$

$$Et_{67} = ES_6 = 18$$

$$Et_{68} = ES_6 = 18$$

$$Et_{79} = ES_7 = 20$$

$$Et_{89} = ES_8 = 23$$

Najkasniji početak aktivnosti

$$LS_{ij} = LC_j - t_{ij}$$

$$LS_{79} = LC_9 - t_{79} = 25 - 4 = 21$$

$$LS_{89} = LC_9 - t_{89} = 25 - 2 = 23$$

$$LS_{57} = LC_7 - t_{57} = 21 - 3 = 18$$

$$LS_{67} = LC_7 - t_{67} = 21 - 1 = 20$$

$$LS_{68} = LC_8 - t_{68} = 23 - 5 = 18$$

$$LS_{38} = LC_8 - t_{38} = 23 - 10 = 13$$

$$LS_{46} = LC_{96} - t_{46} = 18 - 5 = 13$$

$$LS_{56} = LC_6 - t_{56} = 18 - 0 = 18$$

$$LS_{25} = LC_5 - t_{25} = 18 - 3 = 15$$

$$LS_{45} = LC_5 - t_{45} = 18 - 4 = 14$$

$$LS_{24} = LC_4 - t_{25} = 13 - 8 = 5$$

$$LS_{34} = LC_4 - t_{34} = 13 - 0 = 13$$

$$LS_{14} = LC_4 - t_{14} = 13 - 2 = 11$$

$$LS_{13} = LC_3 - t_{13} = 13 - 4 = 9$$

$$LS_{12} = LC_2 - t_{12} = 5 - 5 = 0$$

$$LS_{27} = LC_7 - t_{27} = 21 - 4 = 17$$

Najraniji završetak aktivnosti

$$EC_{ij} = ES_i + t_{ij}$$

$$EC_{12} = ES_1 + t_{12} = 0 + 5 = 5$$

$$EC_{13} = ES_1 + t_{13} = 0 + 4 = 4$$

$$EC_{14} = ES_1 + t_{14} = 0 + 2 = 2$$

$$EC_{24} = ES_2 + t_{24} = 5 + 8 = 13$$

$$EC_{34} = ES_3 + t_{34} = 4 + 0 = 4$$

$$EC_{38} = ES_3 + t_{38} = 4 + 10 = 14$$

$$EC_{25} = ES_2 + t_{25} = 5 + 3 = 8$$

$$EC_{27} = ES_2 + t_{27} = 5 + 4 = 9$$

$$EC_{57} = ES_5 + t_{57} = 17 + 3 = 20$$

$$EC_{56} = ES_5 + t_{56} = 17 + 0 = 17$$

$$EC_{67} = ES_6 + t_{67} = 18 + 1 = 19$$

$$EC_{68} = ES_6 + t_{68} = 18 + 5 = 23$$

$$EC_{79} = ES_7 + t_{79} = 21 + 4 = 25$$

$$EC_{89} = ES_8 + t_{89} = 23 + 2 = 25$$

$$EC_{45} = ES_4 + t_{45} = 13 + 4 = 17$$

$$EC_{46} = ES_4 + t_{46} = 13 + 5 = 18$$

Najkasniji završetak aktivnosti

$$Lt_{ij} = LC_j$$

$$Lt_{89} = LC_9 = 25$$

$$Lt_{79} = LC_9 = 25$$

$$Lt_{67} = LC_7 = 21$$

$$Lt_{57} = LC_7 = 21$$

$$Lt_{68} = LC_8 = 23$$

$$Lt_{57} = LC_7 = 21$$

$$Lt_{56} = LC_6 = 18$$

$$Lt_{46} = LC_6 = 18$$

$$Lt_{45} = LC_5 = 18$$

$$Lt_{38} = LC_8 = 23$$

$$Lt_{34} = LC_4 = 13$$

$$Lt_{27} = LC_7 = 21$$

$$Lt_{25} = LC_5 = 18$$

$$Lt_{24} = LC_4 = 13$$

$$Lt_{14} = LC_4 = 13$$

$$Lt_{13} = LC_3 = 13$$

$$Lt_{12} = LC_2 = 5$$

Vremenske rezerve aktivnosti

Ukupna:

$$TF_{ij} = LC_j - ES_i - t_{ij}$$

$$TF_{12} = LC_2 - ES_1 - t_{12} = 5 - 0 - 5 = 0$$

$$TF_{13} = LC_3 - ES_1 - t_{13} = 13 - 0 - 4 = 9$$

$$TF_{14} = LC_4 - ES_1 - t_{14} = 13 - 0 - 2 = 11$$

$$TF_{24} = LC_4 - ES_2 - t_{24} = 13 - 5 - 8 = 0$$

$$TF_{25} = LC_5 - ES_2 - t_{25} = 18 - 5 - 3 = 10$$

$$\begin{aligned}
 TF_{27} &= LC_7 - ES_2 - t_{27} = 21 - 5 - 4 = 12 \\
 TF_{34} &= LC_4 - ES_3 - t_{34} = 13 - 4 - 0 = 9 \\
 TF_{38} &= LC_8 - ES_3 - t_{38} = 23 - 4 - 10 = 9 \\
 TF_{45} &= LC_5 - ES_4 - t_{45} = 18 - 13 - 4 = 1 \\
 TF_{46} &= LC_6 - ES_4 - t_{46} = 18 - 13 - 5 = 0 \\
 TF_{57} &= LC_7 - ES_5 - t_{57} = 21 - 17 - 3 = 1 \\
 TF_{56} &= LC_6 - ES_5 - t_{56} = 18 - 17 - 0 = 1 \\
 TF_{67} &= LC_7 - ES_4 - t_{67} = 21 - 18 - 1 = 2 \\
 TF_{68} &= LC_8 - ES_6 - t_{68} = 23 - 18 - 5 = 0 \\
 TF_{79} &= LC_9 - ES_7 - t_{79} = 25 - 20 - 4 = 1 \\
 TF_{89} &= LC_9 - ES_8 - t_{89} = 25 - 23 - 2 = 0
 \end{aligned}$$

Slobodna:

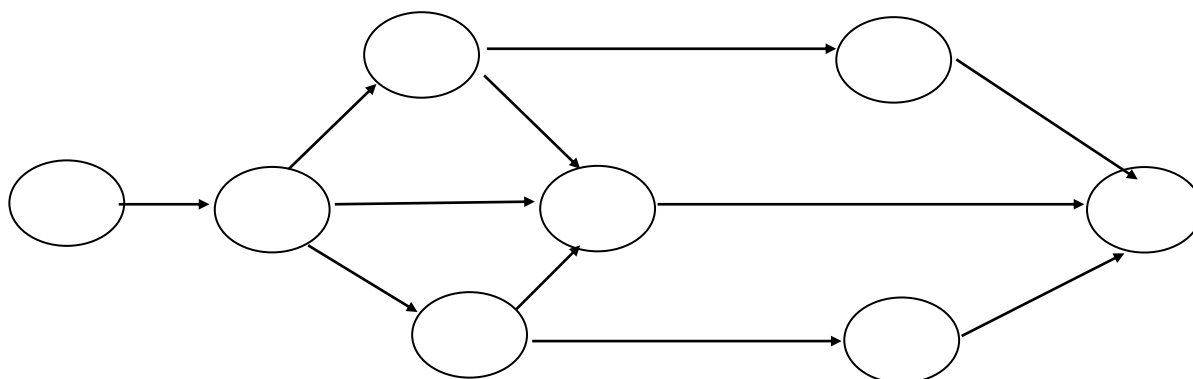
$$FF_{ij} = ES_j - ES_i - t_{ij}$$

$$\begin{aligned}
 FF_{12} &= ES_2 - ES_1 - t_{12} = 5 - 0 - 5 = 0 \\
 FF_{13} &= ES_3 - ES_1 - t_{13} = 4 - 0 - 4 = 0 \\
 FF_{14} &= ES_4 - ES_1 - t_{14} = 13 - 0 - 2 = 11 \\
 FF_{24} &= ES_4 - ES_2 - t_{24} = 13 - 5 - 8 = 0 \\
 FF_{25} &= ES_5 - ES_2 - t_{25} = 17 - 5 - 3 = 9 \\
 FF_{27} &= ES_7 - ES_2 - t_{27} = 20 - 5 - 4 = 11 \\
 FF_{34} &= ES_4 - ES_3 - t_{34} = 13 - 4 - 0 = 9 \\
 FF_{38} &= ES_8 - ES_3 - t_{38} = 23 - 4 - 10 = 9 \\
 FF_{45} &= ES_5 - ES_4 - t_{45} = 17 - 13 - 4 = 0 \\
 FF_{46} &= ES_6 - ES_4 - t_{46} = 18 - 13 - 5 = 0 \\
 FF_{57} &= ES_7 - ES_5 - t_{57} = 20 - 17 - 3 = 0 \\
 FF_{56} &= ES_6 - ES_5 - t_{56} = 18 - 17 - 0 = 1 \\
 FF_{67} &= ES_7 - ES_6 - t_{67} = 20 - 18 - 1 = 1 \\
 FF_{68} &= ES_8 - ES_6 - t_{68} = 23 - 18 - 5 = 0 \\
 FF_{79} &= ES_9 - ES_7 - t_{79} = 25 - 20 - 4 = 1 \\
 FF_{89} &= ES_9 - ES_8 - t_{89} = 25 - 23 - 2 = 0
 \end{aligned}$$

Kritični put: 1 2 4 6 8 9

3. PRIMER -

Neka je dat mrežni dijagram kao na slici. Neka su data i vremena trajanja aktivnosti.



1. postavka

	posmatrane aktivn.	prethodne aktivn.	trajanje
1.	A	-	2

2.	B	A	3
3.	C	A	5
4.	D	A	2
5.	E	B	4
6.	F	D	7
7.	G	B	7
8.	H	E C F	2
9.	I	D	4
10.	J	G	3
11.	K	I	3

2. postavka

	posmatrane aktivn.	koje neposr. slede	trajanje
1.	A	B C D	2
2.	B	E G	3
3.	C	H	5
4.	D	F I	2
5.	E	H	4
6.	F	H	7
7.	G	J	7
8.	H	-	2
9.	I	K	4
10.	J	-	3
11.	K	-	3

3. postavka

B,C,D su istovremene i naredne za A, E je naredna za B, F je naredna za D, G je naredna za B, I je naredna za D, H je naredna za C,E,F koje su istovremene, J je naredna za G, K je naredna za I, J,H,K su istovremene

Analiza vremena događaja- Najranije vreme ostvarenja događaja

$$ES_1 = 0$$

$$ES_2 = \max(ES_1 + t_{12}) = \max(0 + 2) = 2$$

$$ES_3 = \max(ES_2 + t_{23}) = \max(2 + 3) = 5$$

$$ES_4 = \max(ES_2 + t_{24}) = \max(2 + 2) = 4$$

$$ES_5 = \max(ES_2 + t_{25}; ES_3 + t_{35}; ES_4 + t_{45}) = \max(2+5; 5+4; 4+7) = 11$$

$$ES_6 = \max(ES_3 + t_{36}) = \max(5 + 7) = 12$$

$$ES_7 = \max(ES_4 + t_{47}) = \max(4 + 4) = 8$$

$$ES_8 = \max(ES_5 + t_{58}; ES_6 + t_{68}; ES_7 + t_{78}) = \max(11+2; 12+3; 8+3) = \underline{15}$$

Na osnovu najranijeg vremena završnog događaja ES_8 vidi se da projekat traje 15 vremenskih jedinica.

- Najkasnije vreme ostvarenja događaja

$$LC_8 = 15 = ES_8$$

$$LC_7 = \min(LC_8 - t_{78}) = \min(15-3) = 12$$

$$LC_6 = \min(LC_8 - t_{68}) = \min(15-3) = 12$$

$$LC_5 = \min(LC_8 - t_{58}) = \min(15-2) = 13$$

$$LC_4 = \min(LC_7 - t_{47}; LC_5 - t_{45}) = \min(12-4; 13-6) = 7$$

$$LC_3 = \min(LC_6 - t_{36}; LC_5 - t_{35}) = \min(12-7; 13-4) = 5$$

$$LC_2 = \min(LC_5 - t_{25}; LC_4 - t_{24}; LC_3 - t_{23}) = \min(13-5; 7-2; 5-3) = 2$$

$$LC_1 = \min(LC_2 - t_{12}) = \min(2-2) = 0$$

- Potpuni putevi sa vremenima trajanja

$$- (12) (23) (36) (68) \quad t_{12} + t_{23} + t_{36} + t_{68} = \mathbf{15}$$

$$- (12) (23) (35) (58) \quad t_{12} + t_{23} + t_{35} + t_{58} = 11$$

$$- (12) (25) (58) \quad t_{12} + t_{25} + t_{58} = 9$$

$$- (12) (24) (45) (58) \quad t_{12} + t_{24} + t_{45} + t_{58} = 12$$

$$- (12) (24) (47) (78) \quad t_{12} + t_{24} + t_{47} + t_{78} = 11$$

Postoji samo jedan kritični put (15 vremenskih jedinica).

Kritični događaji: 1 2 3 6 8

- Vremenska rezerva događaja

$$TF_1 = LC_1 - ES_1 = 0 - 0 = 0$$

$$TF_2 = LC_2 - ES_2 = 2 - 2 = 0$$

$$TF_3 = LC_3 - ES_3 = 5 - 5 = 0$$

$$TF_4 = LC_4 - ES_4 = 7 - 4 = 3$$

$$TF_5 = LC_5 - ES_5 = 13 - 11 = 2$$

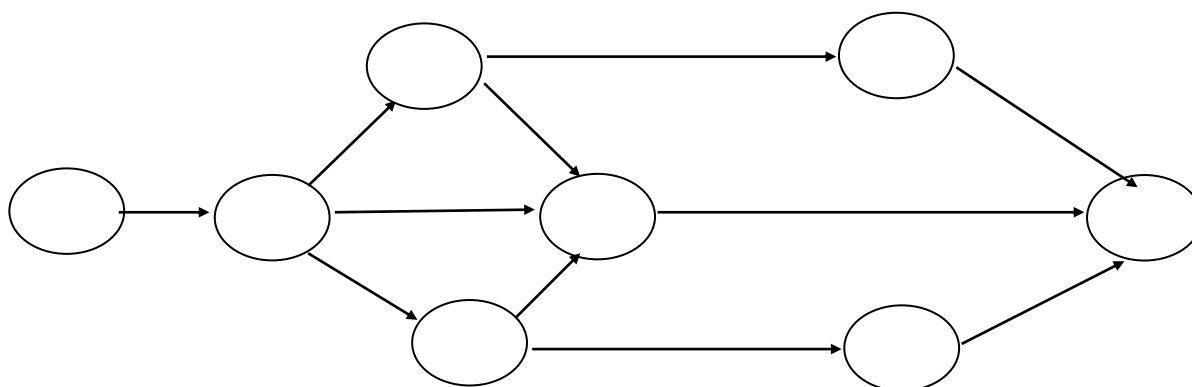
$$TF_6 = LC_6 - ES_6 = 12 - 12 = 0$$

$$TF_7 = LC_7 - ES_7 = 12 - 8 = 4$$

$$TF_8 = LC_8 - ES_8 = 15 - 15 = 0$$

Kritični događaji su sve gde je vremenska rezerva = 0, ostali nisu, jer imaju pozitivne vremenske rezerve.

- Dijagram sa unetim najranijim i najkasnijim vremenima ostvarenja događaja



Koji događaji pripadaju kritičnom putu:

npr. za događaj 1:

I uslov:

$$ES_i = LC_i$$

(za početni događaj je najraniji početak = najkasnijem završetku)

$$ES_1 = 0$$

$$LC_1 = 0 \quad \text{ispunjava}$$

II uslov: (za završni događaj)

$$ES_j = LC_j$$

$$ES_8 = 15$$

$$LC_8 = 15 \quad \text{ispunjava}$$

III uslov:

(vreme trajanja je ono između najranijeg početka i najkasnijeg završetka)

$$ES_j - ES_i = LC_j - LC_i = t_{ij}$$

$$ES_8 = 15$$

$$ES_1 = 0$$

$$LC_1 = 0$$

$$LC_8 = 15$$

$$t_{18} = 2+3+7+3=15 \text{ ispunjava}$$

Koje aktivnosti pripadaju kritičnom putu:

npr. za aktivnost (12) (23) (36) (68)

I uslov:

$$ES_i = LC_i \quad \text{ispunjava uslov}$$

$$ES_1 = 0$$

$$LC_1 = 0$$

II uslov:

$$ES_j = LC_j$$

$$ES_8 = 15 \quad \text{ispunjava uslov}$$

$$LC_8 = 15$$

III uslov:

$$ES_j - ES_i = LC_j - LC_i = t_{ij}$$

$$ES_8 = 15$$

$$ES_1 = 0$$

$$LC_1 = 0$$

$$LC_8 = 15$$

$$t_{18} = 2+3+7+3=15 \text{ ispunjava uslov, aktivnost je kritična}$$

npr. za aktivnost (12) (25) (58)

I uslov:

$$ES_i = LC_i \quad \text{ispunjava uslov}$$

$$ES_1 = 0$$

$$LC_1 = 0$$

II uslov:

$$ES_j = LC_j$$

$$ES_8 = 15 \quad \text{ispunjava uslov}$$

$$LC_8 = 15$$

III uslov:

$$ES_j - ES_i = LC_j - LC_i = t_{ij}$$

$$ES_8 = 15$$

$$ES_1 = 0$$

$$LC_1 = 0$$

$$LC_8 = 15$$

$$t_{18} = 2+5+2=9 \neq 25 \quad \text{ne ispunjava uslov, aktivnost nije kritična}$$

Analiza vremena aktivnosti

- najraniji početak aktivnosti

$$Et_{ij} = ES_i$$

$$Et_{12} = ES_1 = 0$$

$$Et_{23} = ES_2 = 2$$

$$Et_{24} = ES_2 = 2$$

$$Et_{25} = ES_2 = 2$$

$$Et_{36} = ES_3 = 5$$

$$Et_{35} = ES_3 = 5$$

$$Et_{45} = ES_4 = 4$$

$$Et_{47} = ES_4 = 4$$

$$Et_{58} = ES_5 = 11$$

$$Et_{68} = ES_6 = 12$$

$$Et_{78} = ES_7 = 8$$

- najkasniji početak aktivnosti

$$LS_{ij} = LC_j - t_{ij}$$

$$LS_{78} = LC_8 - t_{78} = 15 - 3 = 12$$

$$LS_{68} = LC_8 - t_{68} = 15 - 3 = 12$$

$$LS_{58} = LC_8 - t_{58} = 15 - 2 = 13$$

$$LS_{36} = LC_6 - t_{36} = 12 - 7 = 5$$

$$LS_{35} = LC_5 - t_{35} = 13 - 4 = 9$$

$$LS_{47} = LC_7 - t_{47} = 12 - 4 = 8$$

$$LS_{45} = LC_5 - t_{45} = 13 - 7 = 6$$

$$LS_{23} = LC_3 - t_{23} = 5 - 3 = 2$$

$$LS_{24} = LC_4 - t_{24} = 7 - 2 = 5$$

$$LS_{25} = LC_5 - t_{25} = 5 - 5 = 0$$

$$LS_{12} = LC_2 - t_{12} = 2 - 2 = 0$$

- najraniji završetak aktivnosti

$$EC_{ij} = ES_i + t_{ij}$$

$$EC_{12} = ES_1 + t_{12} = 0 + 2 = 2$$

$$EC_{23} = ES_2 + t_{23} = 2 + 3 = 5$$

$$EC_{24} = ES_2 + t_{24} = 2 + 2 = 4$$

$$EC_{25} = ES_2 + t_{25} = 2 + 5 = 7$$

$$EC_{35} = ES_3 + t_{35} = 5 + 4 = 9$$

$$EC_{36} = ES_3 + t_{36} = 5 + 7 = 12$$

$$EC_{45} = ES_4 + t_{45} = 4 + 7 = 11$$

$$EC_{47} = ES_4 + t_{47} = 4 + 4 = 8$$

$$EC_{58} = ES_5 + t_{58} = 11 + 2 = 13$$

$$EC_{68} = ES_6 + t_{68} = 12 + 3 = 15$$

$$EC_{78} = ES_7 + t_{78} = 8 + 3 = 11$$

- najkasniji završetak aktivnosti

$$Lt_{ij} = LC_j$$

$$Lt_{78} = LC_8 = 15$$

$$Lt_{68} = LC_8 = 15$$

$$Lt_{58} = LC_8 = 15$$

$$Lt_{47} = LC_7 = 12$$

$$Lt_{36} = LC_6 = 12$$

$$Lt_{23} = LC_3 = 5$$

$$Lt_{24} = LC_4 = 7$$

$$Lt_{25} = LC_5 = 13$$

$$Lt_{12} = LC_2 = 2$$

Vremenske rezerve aktivnosti

Ukupna:

$$TF_{ij} = LC_j - ES_i - t_{ij}$$

$$TF_{12} = LC_2 - ES_1 - t_{12} = 2 - 0 - 2 = 0$$

$$\begin{aligned}TF_{23} &= LC_3 - ES_2 - t_{23} = 5-2-3=0 \\TF_{24} &= LC_4 - ES_2 - t_{24} = 7-2-2=3 \\TF_{25} &= LC_5 - ES_2 - t_{25} = 13-2-5=6 \\TF_{36} &= LC_6 - ES_3 - t_{36} = 12-5-7=0 \\TF_{36} &= LC_5 - ES_3 - t_{35} = 13-5-4=4 \\TF_{45} &= LC_5 - ES_4 - t_{45} = 13-4-7=2 \\TF_{47} &= LC_7 - ES_4 - t_{47} = 12-4-4=4 \\TF_{58} &= LC_8 - ES_5 - t_{58} = 15-11-2=2 \\TF_{68} &= LC_8 - ES_6 - t_{68} = 15-12-3=0 \\TF_{78} &= LC_8 - ES_7 - t_{78} = 15-8-3=4\end{aligned}$$

Slobodna:

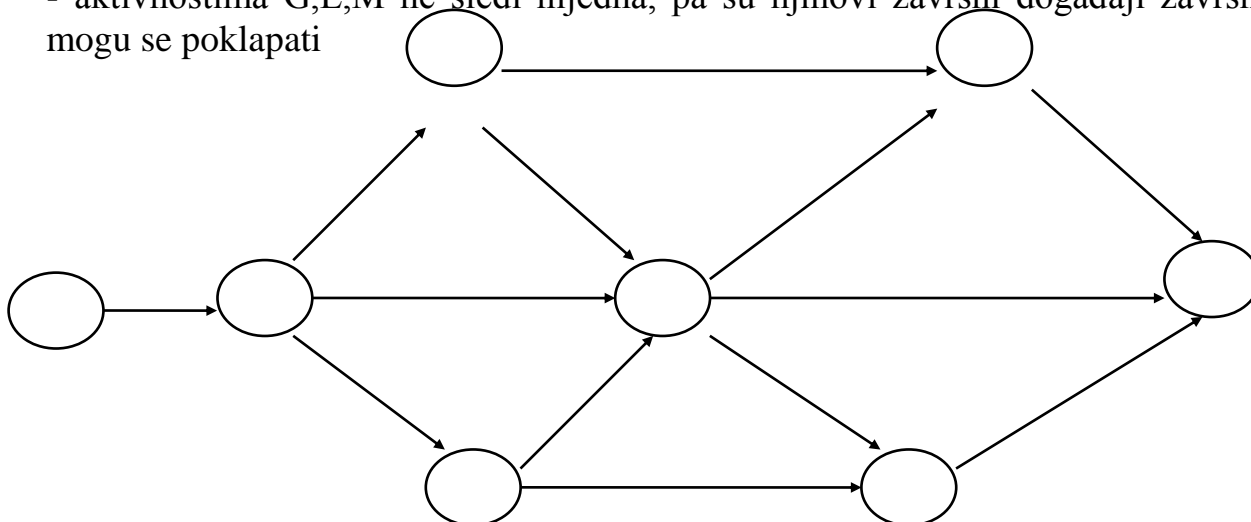
$$\begin{aligned}FF_{ij} &= ES_j - ES_i - t_{ij} \\FF_{12} &= ES_2 - ES_1 - t_{12} = 2-0-2=0 \\FF_{23} &= ES_3 - ES_2 - t_{23} = 5-2-3=0 \\FF_{24} &= ES_4 - ES_2 - t_{24} = 4-2-2=0 \\FF_{25} &= ES_5 - ES_2 - t_{25} = 10-2-5=3 \\FF_{35} &= ES_5 - ES_3 - t_{35} = 10-5-4=1 \\FF_{36} &= ES_5 - ES_3 - t_{36} = 12-5-7=0 \\FF_{45} &= ES_5 - ES_4 - t_{45} = 11-4-7=0 \\FF_{47} &= ES_7 - ES_4 - t_{47} = 8-4-4=0 \\FF_{68} &= ES_8 - ES_6 - t_{68} = 15-12-3=0 \\FF_{78} &= ES_8 - ES_7 - t_{78} = 15-8-3=4\end{aligned}$$

4. PRIMER

Aktivnosti: A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K,L,M

Nacrtati mrežni dijagram na osnovu sledećih podataka:

- aktivnost A ne sledi nijednu drugu, pa je početna
- njoj neposredno slede B,C,D, pa se njen završni događaj poklapa sa njihovim početnim
- početni događaj aktivnosti E,F se poklapa sa završnim za B, jer joj one neposredno slede
- H neposredno sledi iz C,F,I, pa se njihovi završni događaji poklapaju
- početni događaj za I je završni za D
- J neposredno sledi iz D, pa se njen početni događaj poklapa sa početnim za I
- K i L neposredno slede iz C,F,I, pa su njihovi početni događaji završni tih aktivnosti
- M neposredno sledi iz J,K, pa je njen početni događaj završni za njih
- G neposredno sledi iz E,H, pa je njen početni događaj završni za njih
- aktivnostima G,L,M ne sledi nijedna, pa su njihovi završni događaji završni za projekat i mogu se poklapati



Analiza vremena po metodi PERT (Project Evaluation and Review Technique - metoda procene i revizije projekata)

PERT metoda je druga osnovna metoda za analizu vremena i određivanje kritičnog puta. Ova metoda naročito nalazi primenu kod projekata gde dolaze do izražaja istraživački poslovi, odnosno kod onih projekata čije trajanje aktivnosti ima karakter slučajnih veličina. Obično se te aktivnosti prvi put izvode, pa se njihovo trajanje ne zna. Ova metoda omogućuje da se računa i planira sa određenim slučajnim elementima. Pojavila se nešto posle CPM metode, kao njena nadgradnja. Nastala je 1958. godine i vezuje se za ime naučnika W.Fazara. Razvijena je i prvi put korišćena u okviru razvoja programa rakete Polaris, a za potrebe američke avijacije.

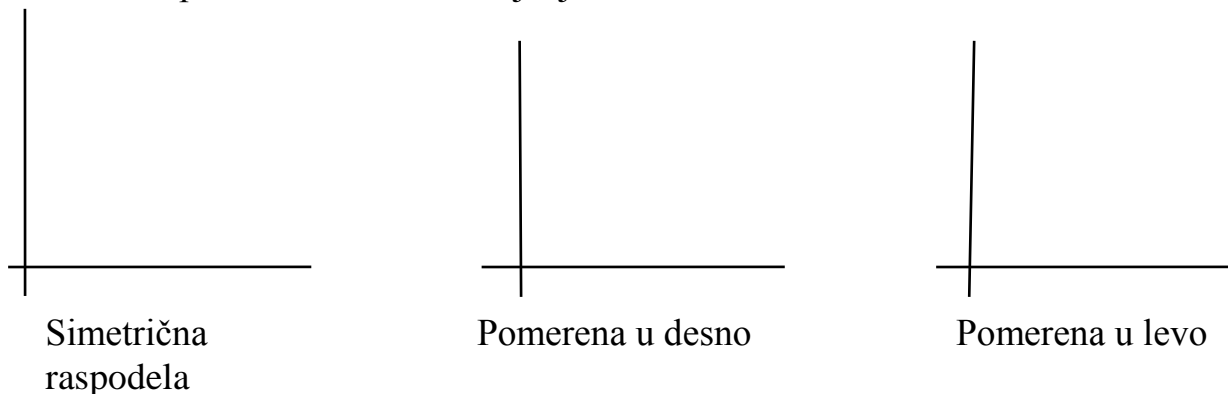
Razlika PERT i CPM metode nastaje u fazi analize vremena. Znači, kad izvršimo analizu strukture i nacrtamo mrežni dijagram, sledi faza. Razlika je u tome što je vreme kod CPM metode determinističko, a kod PERT stohastičko, tako da se kod PERT metode vrši procena vremena trajanja aktivnosti. Definišu se najpovoljniji, najnepovoljniji rokovi završetka aktivnosti, kao i najverovatniji. Srećemo se sa pojmom verovatnoće, a procena vremena se vrši pri različitim vrednostima vremena.

Polazna vremena za svaku aktivnost su:

- **optimističko vreme** " a_{ij} " trajanja izvršenja pojedinih aktivnosti (i, j). Neka aktivnost bi mogla biti izvršena za vreme "a" ako bi sve teklo idealno bez ikakvih prepreka. Vreme koje je potrebno da se ostvare samo povoljne okolnosti je poznato kao optimističko. To je najkraće moguće vreme za izvođenje neke aktivnosti i verovatnoća da se ono postigne je mala. Drugim rečima, optimističko vreme je donja granica vremena ostvarenja aktivnosti čije su verovatnoće različite od nule, tj. svako vreme manje od optimističkog ima verovatnoću jednaku nuli.
- "**najverovatnije vreme** " m_{ij} " izvršenja aktivnosti (i, j). To je vreme za koje bi se najverovatnije izvršila određena aktivnosti pri normalnim okolnostima. Ako se posmatra β raspodela, onda se "m" vreme pojavljuje u intervalu koji je omeđen sa "a" i "b" za normalnu raspodelu.
- **pesimističko vreme** " b_{ij} " izvršenja aktivnosti. Trajanje aktivnosti pri ostvarenju najnepovoljnijih okolnosti zahteva najduže vreme i to vreme je poznato kao pesimističko. Ono pokazuje koliko može trajati neka aktivnost kada sve nepovoljne okolnosti koje mogu da nastanu stvarno i nastanu. Ono predstavlja gornju granicu vremena čije su verovatnoće ostvarenja različite od nule, tj. verovatnoće ostvarenja aktivnosti u vremenima većim od pesimističkog jednake su nuli. Drugim rečima, to je najduže vreme za izvođenje određene aktivnosti.

Postoji čitav niz pretpostavki o raspodeli verovatnoća vremena trajanja aktivnosti.

Grafički prikaz verovatnoća trajanja aktivnosti:



Sa slika se vidi da su to asimetrične funkcije, da najverovatnije vreme može biti bliže jednoj ili drugoj granici. U izuzetnom slučaju, to je simetrična funkcija.

Funkcija verovatnoće trajanja aktivnosti mora biti tako definisana da ispunjava uslove:

$$f(t_{ij}) = \begin{cases} f(t_{ij}), & a_{ij} \leq t_{ij} \leq b_{ij} \\ 0 & \text{u ostalim slučajevima} \end{cases}$$

Postoji veliki broj teorijskih radova u kojima se tretira određivanje raspodela verovatnoća trajanja aktivnosti. Najviše je onih koji prihvataju da je to Gama raspodela (β). Znači, pretpostavka je da se trajanje svih aktivnosti ponaša po zakonu β -raspodele, a trenutak njihovog završetka, odnosno odigravanje pojedinih događaja po zakonu normalne raspodele.

Vremena "a_{ij}" i "b_{ij}" se određuju empirijski, a "m_{ij}" može da ima bilo koju vrednost u intervalu "a_{ij} b_{ij}". Najčešće se uzima da je $m_{ij} = a_{ij} + b_{ij} / 2$. To znači da mora da postoji odnos: $a_{ij} \leq m_{ij} \leq b_{ij}$.

Znači, obično se uzima da se vremena a_{ij}, b_{ij} zadaju od strane izvršioca pojedinih aktivnosti kao optimistička i pesimistička procena trajanja pojedinih aktivnosti, a m_{ij} se računa kao $m_{ij} = a_{ij} + b_{ij} / 2$, pa se onda vreme za koje se očekuje da će neka aktivnost da se desi (**očekivano vreme trajanja aktivnosti (i,j)**) računa kao:

$$(t_e)_{ij} = a_{ij} + 4 m_{ij} + b_{ij} / 6$$

tj. je (t_e)_{ij} aritmetička sredina vremena $a_{ij} + b_{ij} / 2$ i 2m

Podrazumeva se da interval ("a_{ij} b_{ij}") zauzima 6 standardnih devijacija distribucije. Izraz je otuda što 90% gustine pada u tri standardne devijacije od srednje vrednosti.

Varijansa δ^2

$$V = \delta^2 (t_e)_{ij} = (b_{ij} - a_{ij} / 6)^2$$

Znači, za svaku aktivnost se računaju (t_e)_{ij} i V. Pri tome se vodi računa da je $a_{ij} < b_{ij}$, a m_{ij} je između a_{ij} i b_{ij}. Tako se računanjem (t_e)_{ij} i V sprovodi i logička kontrola, važna za analizu nedefinisanosti pojedinih aktivnosti. Vrednost za varijansu treba da je relativno mala, jer ukoliko je ona manja, utoliko su rasturanja i nepreciznosti koje su vezane za definisanost pojedinih aktivnosti manje. Zato je varijansa mera grubosti definisanosti polaznih podataka.

Na osnovu dobijenih vrednosti za t_e vrši se analiza vremena događaja, tj. određuju se:

- najranije vreme ostvarenja događaja T_E

uvedimo oznaku:

$$T_E = ES_i \quad \text{sada je:}$$

$$(T_E)_j = \max_i ((T_E)_i + (t_e)_{ij}), \quad (T_E)_1 = 0, \quad j = 2, 3, \dots, n, \quad i < j$$

$$\text{Kod CPM je bilo: } ES_j = \max_j (ES_i + t_{ij})$$

- varijansa najranijeg vremena ostvarenja događaja

$$\delta^2 (T_E)_j = \delta^2 (T_E)_i + \delta^2 (t_e)_{ij}$$

- najkasnije vreme ostvarenja događaja T_L

uvedimo oznaku:

$$T_L = LC_i \quad \text{sada je:}$$

$$(T_L)_i = \min_j ((T_L)_j - (t_e)_{ij}), \quad (T_L)_n = (T_E)_n, \quad j = n-1, n-2, \dots, 1, \quad i < j$$

Kod CPM je bilo: $LC_j = \min_i (LC_j - t_{ij})$

- **varijansa najkasnijeg vremena ostvarenja događaja**

$$\delta^2(T_L)_i = \delta^2(T_L)_j + \delta^2(t_{e})_{ij}$$

- **vremenska rezerva događaja (S)_i**:

$$(S)_i = (T_L)_i - (T_E)_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

- **varijansa očekivanih vremenskih rezervi**

$$\delta^2 S_i = \delta^2(T_E)_i + \delta^2(T_L)_i$$

Kritični put, koji predstavlja niz međusobno povezanih aktivnosti koje se protežu između početnog i završnog događaja određenog mrežnog dijagrama, a u zbiru imaju najduže vreme trajanja.

Aktivnost (i, j) ulazi u sastav kritičnog puta ako je za nju ispunjen sledeći **uslov**:

$$(T_L)_j - (T_E)_i - (t_e)_{ij} = 0$$

Analiza vremena aktivnosti zahteva dublju analizu i nećemo je proučavati.

Na kraju analize vremena po metodi PERT, ispituje se:

- **verovatnoća da se neki događaj ostvari u predviđenom vremenu**

neka je T_i^0 trenutak koji je unapred dat. Očekivano vreme najranijeg ostvarenja je $(T_E)_i$. Odnos tih veličina može biti dvojak:

- $T_i^0 - (T_E)_i > 0$ što znači da se i-ti događaj ostvaruje pre predviđenog roka

- $T_i^0 - (T_E)_i \leq 0$ što znači da se događaj ostvaruje kasnije od predviđenog roka

Za prvi slučaj se može reći da se deo projekta do i-tog događaja može ostvariti u predviđenom roku, a za drugi slučaj da se to neće desiti.

Za prvi slučaj, pošto se najranije vreme ostvarenja događaja distribuira po normalnoj raspodeli, to se verovatnoća da se događaj ostvari pre predviđenog roka može odrediti iz tablice za normalnu raspodelu. **Faktor verovatnoće** za taj slučaj je:

$$Z_i = \frac{T_i^0 - (T_E)_i}{\delta^2(T_E)_i}$$

- **verovatnoća da se postigne određena vremenska rezerva**

Vremenska rezerva se određuje kao razlika najkasnijeg i najranijeg vremena ostvarenja događaja. Kako su distribucije najranijeg i najkasnijeg vremena ostvarenja događaja normalne, to se i očekivana vremenska rezerva distribuira po normalnoj raspodeli, pa se može odrediti verovatnoća da se izračunata vremenska rezerva ostvari. **Faktor za tu verovatnoću** je:

$$Z_i = \frac{(T_L)_i - (T_E)_i}{\sqrt{\delta^2(T_E)_i + \delta^2(T_L)_i}} = \frac{S_i}{\sqrt{\delta^2(T_E)_i + \delta^2(T_L)_i}}$$

Prikazivanje vremena na stohastičkom dijagramu

Kod determinističkih mrežnih dijagrama:

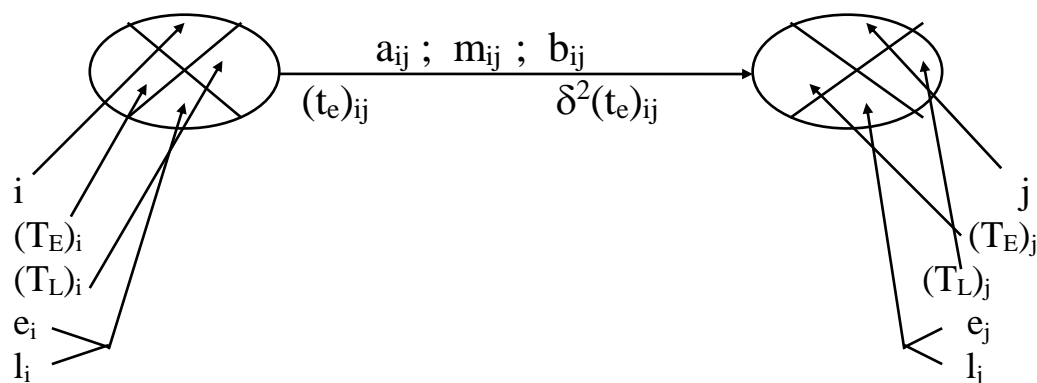
-vreme trajanja aktivnosti se unosi pored strelice kojom se pokazuje tok aktivnosti

-broj događaja se prikazuje u prvoj trećini kruga

-najranije vreme ostvarenja u levoj, a najkasnije u desnoj trećini kruga.

Kod stohastičkih mrežnih dijagrama:

- sa gornje strane strelice se upisuju optimističko (a_{ij}); najverovatnije (m_{ij}); pesimističko vreme (b_{ij})
- sa donje strane strelice se upisuju očekivano vreme trajanja aktivnosti $(t_e)_{ij}$ i njegova varijansa ($\delta^2(t_e)_{ij}$)
- kružić kojim se prikazuje događaj deli se na četiri dela
 - u prvom delu se upisuje broj događaja
 - levo se upisuje očekivano najranije ostvarenje događaja
 - desno se upisuje očekivano najkasnije ostvarenje događaja
 - u četvrtom delu se upisuju brojevi događaja preko kojih je određeno očekivano najranije, odnosno najkasnije vreme ostvarenja događaja



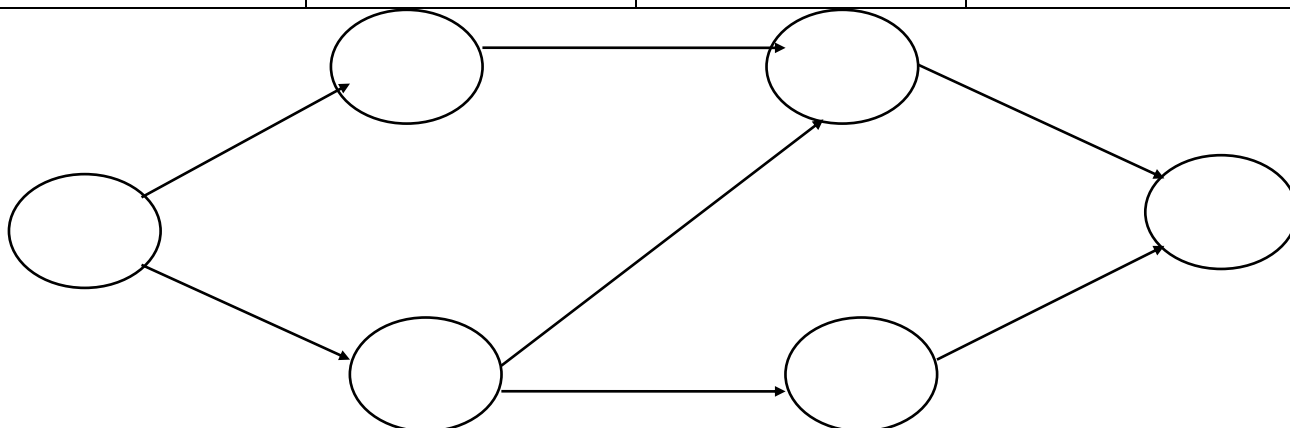
Tabelarno predstavljanje se razlikuje:

- kod determinističkih mrežnih dijagrama vreme se prikazuje jednom kolonom
- kod stohastičkih su to pet kolona: optimističko (a_{ij}); najverovatnije (m_{ij}); optimističko vreme (b_{ij}); očekivano vreme trajanja aktivnosti $(t_e)_{ij}$ i njegova varijansa ($\delta^2(t_e)_{ij}$)
- ostale kolone se definišu prema analizi vremena (ako se analiziraju samo ostvarenja događaja, broj kolona je manji; za analizu vremena aktivnosti, broj kolona se jako uvećava)

1. PRIMER

Dati su podaci:

aktivnosti	a_{ij}	m_{ij}	b_{ij}
1-2	13	15	17
2-4	6	7	8
1-3	4	8	12
3-4	2.1	4.4	4.5
4-6	2	7	12
3-5	1.5	6	11
5-6	11	14	17



- očekivano vreme trajanja aktivnosti

$$(t_e)_{ij} = a_{ij} + 4 m_{ij} + b_{ij} / 6$$

$$(t_e)_{12} = a_{12} + 4 m_{12} + b_{12} / 6 = 13 + 4 * 15 + 17 / 6 = 90 / 6 = 15$$

$$(t_e)_{24} = a_{24} + 4 m_{24} + b_{24} / 6 = 6 + 4 * 7 + 8 / 6 = 42 / 6 = 7$$

$$(t_e)_{13} = a_{13} + 4 m_{13} + b_{13} / 6 = 4 + 4 * 8 + 12 / 6 = 48 / 6 = 8$$

$$(t_e)_{34} = a_{34} + 4 m_{34} + b_{34} / 6 = 2.1 + 4 * 4.4 + 4.5 / 6 = 24.2 / 6 = 4.033$$

$$(t_e)_{46} = a_{46} + 4 m_{46} + b_{46} / 6 = 2 + 4 * 7 + 12 / 6 = 42 / 6 = 7$$

$$(t_e)_{35} = a_{35} + 4 m_{35} + b_{35} / 6 = 1.5 + 4 * 6 + 11 / 6 = 36.5 / 6 = 6.08$$

$$(t_e)_{56} = a_{56} + 4 m_{56} + b_{56} / 6 = 11 + 4 * 14 + 17 / 6 = 84 / 6 = 14$$

- varijansa očekivanog vremena trajanja aktivnosti

$$\delta^2 (t_e)_{ij} = (b_{ij} - a_{ij} / 6)^2$$

$$\delta^2 (t_e)_{12} = (b_{12} - a_{12} / 6)^2 = (17 - 13 / 6)^2 = (4 / 6)^2 = 16 / 36 = 0.44$$

$$\delta^2 (t_e)_{24} = (b_{24} - a_{24} / 6)^2 = (8 - 6 / 6)^2 = (2 / 6)^2 = 4 / 36 = 0.11$$

$$\delta^2 (t_e)_{13} = (b_{13} - a_{13} / 6)^2 = (12 - 4 / 6)^2 = (8 / 6)^2 = 64 / 36 = 1.77$$

$$\delta^2 (t_e)_{34} = (b_{34} - a_{34} / 6)^2 = (4.5 - 2.1 / 6)^2 = (2.4 / 6)^2 = 5.76 / 36 = 0.16$$

$$\delta^2 (t_e)_{46} = (b_{46} - a_{46} / 6)^2 = (12 - 2 / 6)^2 = (10 / 6)^2 = 100 / 36 = 2.77$$

$$\delta^2 (t_e)_{35} = (b_{35} - a_{35} / 6)^2 = (11 - 1.5 / 6)^2 = (9.5 / 6)^2 = 90.25 / 36 = 2.506$$

$$\delta^2 (t_e)_{56} = (b_{56} - a_{56} / 6)^2 = (17 - 11 / 6)^2 = (6 / 6)^2 = 36 / 36 = 1.00$$

- najranije vreme ostvarenja događaja

$$(T_E)_j = \max_i ((T_E)_i + (t_e)_{ij}),$$

$$(T_E)_1 = 0$$

$$(T_E)_2 = \max ((T_E)_1 + (t_e)_{12}) = \max(0 + 15) = 15$$

$$(T_E)_3 = \max ((T_E)_1 + (t_e)_{13}) = \max(0 + 8) = 8$$

$$(T_E)_4 = \max ((T_E)_2 + (t_e)_{24}; (T_E)_3 + (t_e)_{34}) = \\ = \max(15 + 7; 8 + 4.033) = \max(22; 12.033) = 22$$

$$(T_E)_5 = \max ((T_E)_3 + (t_e)_{35}) = \max(8 + 6.08) = 14.08$$

$$(T_E)_6 = \max ((T_E)_4 + (t_e)_{46}; (T_E)_5 + (t_e)_{56}) = \\ = \max(22 + 7; 14.08 + 14) = \max(29; 28.08) = 29$$

- varijansa najranijeg vremena ostvarenja događaja

$$\delta^2 (T_E)_j = \delta^2 (T_E)_i + \delta^2 (t_e)_{ij}$$

$$\delta^2 (T_E)_1 = 0$$

$$\delta^2 (T_E)_2 = \delta^2 (T_E)_1 + \delta^2 (t_e)_{12} = 0 + 0.44 = 0.44$$

$$\delta^2 (T_E)_3 = \delta^2 (T_E)_1 + \delta^2 (t_e)_{13} = 0 + 1.77 = 1.77$$

$$\delta^2 (T_E)_4 = \delta^2 (T_E)_2 + \delta^2 (t_e)_{24} = 0.44 + 0.11 = 0.55$$

jer smo $(T_E)_4$ odredili iz 2. događaja

$$\delta^2(T_E)_5 = \delta^2(T_E)_3 + \delta^2(t_e)_{35} = 1.77 + 2.506 = 4.276$$

$$\delta^2(T_E)_6 = \delta^2(T_E)_4 + \delta^2(t_e)_{46} = 0.55 + 2.77 = 3.32$$

jer smo $(T_E)_6$ odredili iz 4. događaja

- **najkasnije vreme ostvarenja događaja**

$$(T_L)_i = \min_j ((T_L)_j - (t_e)_{ij}), \quad (T_L)_n = (T_E)_n$$

$$(T_L)_6 = (T_E)_6 = 29$$

$$(T_L)_5 = \min((T_L)_6 - (t_e)_{56}) = \min(29 - 14) = 15$$

$$(T_L)_4 = \min((T_L)_6 - (t_e)_{46}) = \min(29 - 7) = 22$$

$$(T_L)_3 = \min((T_L)_4 - (t_e)_{34}; (T_L)_5 - (t_e)_{35}) = \\ = \min(22 - 4.033; 15 - 6.08) = \min(17.967; 8.92) = 8.92$$

$$(T_L)_2 = \min((T_L)_4 - (t_e)_{24}) = \min(22 - 7) = 15$$

$$(T_L)_1 = \min((T_L)_2 - (t_e)_{12}; (T_L)_3 - (t_e)_{13}) = \\ = \min(15 - 15; 8.92 - 8) = \min(0; 0.92) = 0$$

- **varijansa najkasnijeg vremena ostvarenja događaja**

$$\delta^2(T_L)_i = \delta^2(T_L)_j + \delta^2(t_e)_{ij}$$

$$\delta^2(T_L)_6 = \delta^2(T_E)_6 = 3.32$$

$$\delta^2(T_L)_5 = \delta^2(T_L)_6 + \delta^2(t_e)_{56} = 3.32 + 1.00 = 4.32$$

$$\delta^2(T_L)_4 = \delta^2(T_L)_6 + \delta^2(t_e)_{46} = 3.32 + 2.77 = 6.09$$

$$\delta^2(T_L)_3 = \delta^2(T_L)_5 + \delta^2(t_e)_{35} = 4.32 + 2.506 = 6.826$$

jer smo $(T_L)_3$ odredili iz 5. događaja

$$\delta^2(T_L)_2 = \delta^2(T_L)_4 + \delta^2(t_e)_{24} = 6.09 + 0.11 = 6.20$$

$$\delta^2(T_L)_1 = \delta^2(T_L)_2 + \delta^2(t_e)_{12} = 6.20 + 0.44 = 6.64$$

jer smo $(T_L)_1$ odredili iz 2. događaja

- **vremenska rezerva događaja**

$$S_i = (T_L)_i - (T_E)_i$$

$$S_1 = (T_L)_1 - (T_E)_1 = 0 - 0 = 0$$

$$S_2 = (T_L)_2 - (T_E)_2 = 15 - 15 = 0$$

$$S_3 = (T_L)_3 - (T_E)_3 = 8.92 - 8 = 0.92$$

$$S_4 = (T_L)_4 - (T_E)_4 = 22 - 22 = 0$$

$$S_5 = (T_L)_5 - (T_E)_5 = 15 - 14.08 = 0.92$$

$$S_6 = (T_L)_6 - (T_E)_6 = 29 - 29 = 0$$

- **varijansa očekivanih vremenskih rezervi**

$$\delta^2 S_i = \delta^2(T_E)_i + \delta^2(T_L)_i$$

$$\delta^2 S_1 = \delta^2(T_E)_1 + \delta^2(T_L)_1 = 0 + 6.64 = 6.64$$

$$\delta^2 S_2 = \delta^2(T_E)_2 + \delta^2(T_L)_2 = 0.44 + 6.20 = 6.64$$

$$\delta^2 S_3 = \delta^2(T_E)_3 + \delta^2(T_L)_3 = 1.77 + 6.826 = 8.596$$

$$\delta^2 S_4 = \delta^2(T_E)_4 + \delta^2(T_L)_4 = 0.55 + 6.09 = 6.64$$

$$\delta^2 S_5 = \delta^2(T_E)_5 + \delta^2(T_L)_5 = 4.276 + 4.32 = 8.596$$

$$\delta^2 S_6 = \delta^2(T_E)_6 + \delta^2(T_L)_6 = 3.32 + 3.32 = 6.64$$

Varijanse očekivanih vremenskih rezervi kritičnih događaja su velike:

$$\delta^2 S_1 = 6.64, \delta^2 S_2 = 6.64, \delta^2 S_4 = 6.64, \delta^2 S_6 = 6.64$$

pa se mogu očekivati velika odstupanja.

- kritični put - potpuni putevi i njihova vremena

$$(12) (24) (46) \quad t_{12} + t_{24} + t_{46} = 15 + 7 + 7 = 29 \text{ kritični put}$$

$$(13) (34) (46) \quad t_{13} + t_{34} + t_{46} = 8 + 4.033 + 7 = 19.033$$

$$(13) (35) (56) \quad t_{13} + t_{35} + t_{56} = 8 + 6.08 + 14 = 28.08$$

Kritični put čine događaji: 1 2 4 6

- koja aktivnost pripada kritičnom putu

ako ispunjava uslov: $(T_L)_j - (T_E)_i - (t_e)_{ij} = 0$

- NPR. aktivnosti:

$$(12) (24) (46)$$

$$(T_L)_6 = 29, \quad (T_E)_1 = 0, \quad t_{12} + t_{24} + t_{46} = 15 + 7 + 7 = 29$$

ispunjava uslov, jer je $29 - 0 - 29 = 0$

- NPR. aktivnosti

$$(13) (34) (46)$$

$$(T_L)_6 = 29, \quad (T_E)_1 = 0, \quad t_{13} + t_{34} + t_{46} = 8 + 4.033 + 7 = 19.033$$

ne ispunjava uslov, jer je $29 - 0 - 19.033 = 9.967 \neq 0$

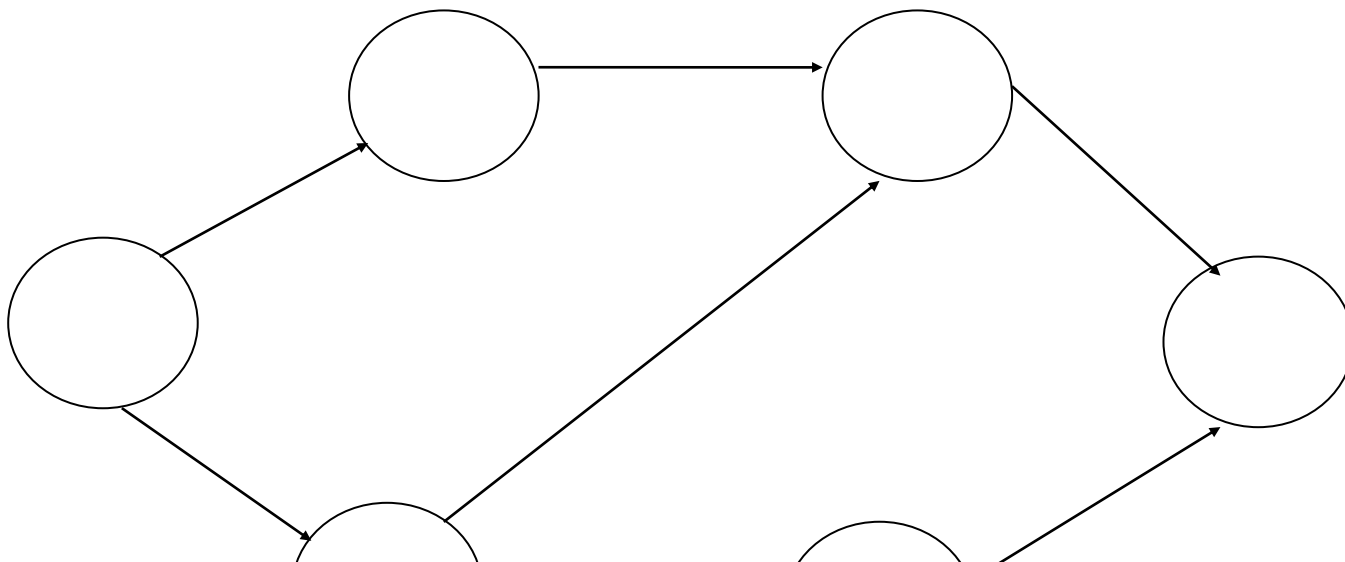
- NPR. aktivnosti:

$$(13) (35) (56)$$

$$(T_L)_6 = 29, \quad (T_E)_1 = 0, \quad t_{13} + t_{35} + t_{56} = 8 + 6.08 + 14 = 28.08$$

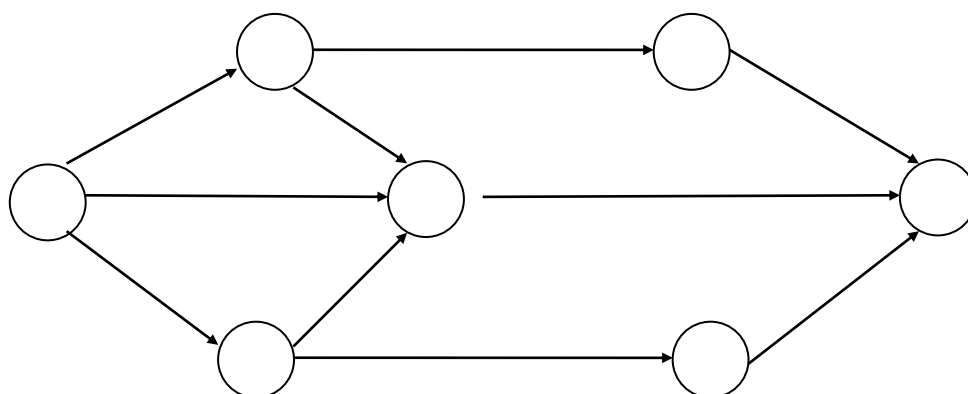
ne ispunjava uslov, jer je $29 - 0 - 28.08 = 0.92 \neq 0$

- grafičko predstavljanje



2. PRIMER

aktivnosti	a_{ij}	m_{ij}	b_{ij}
1-2	3	4	6
1-3	3	7	8
1-4	2	5	6
2-4	5	6	9
2-5	4	8	9
3-4	2	3	6
3-6	5	7	8
4-7	3	5	9
5-7	3	5	6
6-7	6.5	10	12.6



- očekivano vreme trajanja aktivnosti

$$(t_e)_{ij} = a_{ij} + 4 m_{ij} + b_{ij} / 6$$

$$(t_e)_{12} = a_{12} + 4 m_{12} + b_{12} / 6 = 3 + 4 * 4 + 6 / 6 = 25 / 6 = 4.2$$

$$(t_e)_{13} = a_{13} + 4 m_{13} + b_{13} / 6 = 3 + 4 * 7 + 8 / 6 = 39 / 6 = 6.5$$

$$(t_e)_{14} = a_{14} + 4 m_{14} + b_{14} / 6 = 2 + 4 * 5 + 6 / 6 = 28 / 6 = 4.7$$

$$(t_e)_{24} = a_{24} + 4 m_{24} + b_{24} / 6 = 5 + 4 * 6 + 9 / 6 = 38 / 6 = 6.3$$

$$(t_e)_{25} = a_{25} + 4 m_{25} + b_{25} / 6 = 4 + 4 * 8 + 9 / 6 = 45 / 6 = 7.5$$

$$(t_e)_{34} = a_{34} + 4 m_{34} + b_{34} / 6 = 2 + 4 * 3 + 6 / 6 = 20 / 6 = 3.3$$

$$(t_e)_{36} = a_{36} + 4 m_{36} + b_{36} / 6 = 5 + 4 * 7 + 8 / 6 = 41 / 6 = 6.8$$

$$(t_e)_{47} = a_{47} + 4 m_{47} + b_{47} / 6 = 3 + 4 * 5 + 9 / 6 = 32 / 6 = 5.3$$

$$(t_e)_{57} = a_{57} + 4 m_{57} + b_{57} / 6 = 3 + 4 * 5 + 6 / 6 = 29 / 6 = 4.8$$

$$(t_e)_{67} = a_{67} + 4 m_{67} + b_{67} / 6 = 6.5 + 4 * 10 + 12.6 / 6 = 59.1 / 6 = 9.8$$

- varijansa

$$\delta^2 (t_e)_{ij} = (b_{ij} - a_{ij} / 6)^2$$

$$\delta^2(t_e)_{12} = (b_{12} - a_{12}/6)^2 = (6-3/6)^2 = (3/6)^2 = 9/36 = 0.25$$

$$\delta^2(t_e)_{13} = (b_{13} - a_{13}/6)^2 = (8-3/6)^2 = (5/6)^2 = 25/36 = 0.69$$

$$\delta^2(t_e)_{14} = (b_{14} - a_{14}/6)^2 = (6-2/6)^2 = (4/6)^2 = 16/36 = 0.44$$

$$\delta^2(t_e)_{24} = (b_{24} - a_{24}/6)^2 = (9-5/6)^2 = (4/6)^2 = 16/36 = 0.44$$

$$\delta^2(t_e)_{25} = (b_{25} - a_{25}/6)^2 = (9-4/6)^2 = (5/6)^2 = 25/36 = 0.69$$

$$\delta^2(t_e)_{34} = (b_{34} - a_{34}/6)^2 = (6-2/6)^2 = (4/6)^2 = 16/36 = 0.44$$

$$\delta^2(t_e)_{36} = (b_{36} - a_{36}/6)^2 = (8-5/6)^2 = (3/6)^2 = 9/36 = 0.25$$

$$\delta^2(t_e)_{47} = (b_{47} - a_{47}/6)^2 = (9-3/6)^2 = (6/6)^2 = 36/36 = 1.00$$

$$\delta^2(t_e)_{57} = (b_{57} - a_{57}/6)^2 = (6-3/6)^2 = (3/6)^2 = 9/36 = 0.25$$

$$\delta^2(t_e)_{67} = (b_{67} - a_{67}/6)^2 = (12.6-6.5/6)^2 = (6.1/6)^2 = 37.21/36 = 1.04$$

- **najranije vreme ostvarenja događaja**

$$(T_E)_j = \max_i ((T_E)_i + (t_e)_{ij}),$$

$$(T_E)_1 = 0$$

$$(T_E)_2 = \max((T_E)_1 + (t_e)_{12}) = \max(0 + 4.2) = 4.2$$

$$(T_E)_3 = \max((T_E)_1 + (t_e)_{13}) = \max(0 + 6.5) = 6.5$$

$$(T_E)_4 = \max((T_E)_2 + (t_e)_{24}; (T_E)_3 + (t_e)_{34}; (T_E)_1 + (t_e)_{14}) = \\ = \max(4.2 + 6.3; 0 + 4.7; 6.5 + 3.3) = 10.5$$

$$(T_E)_5 = \max((T_E)_2 + (t_e)_{25}) = \max(4.2 + 7.5) = 11.7$$

$$(T_E)_6 = \max((T_E)_3 + (t_e)_{36}) = \max(6.5 + 6.8) = 13.3$$

$$(T_E)_7 = \max((T_E)_4 + (t_e)_{47}; (T_E)_5 + (t_e)_{57}; (T_E)_6 + (t_e)_{67}) = \\ = \max(10.5 + 5.3; 11.7 + 4.8; 13.3 + 9.8) = 23.1$$

- **varijansa najranijeg vremena ostvarenja događaja**

$$\delta^2(T_E)_j = \delta^2(T_E)_i + \delta^2(t_e)_{ij}$$

$$\delta^2(T_E)_1 = 0$$

$$\delta^2(T_E)_2 = \delta^2(T_E)_1 + \delta^2(t_e)_{12} = 0 + 0.25 = 0.25$$

$$\delta^2(T_E)_3 = \delta^2(T_E)_1 + \delta^2(t_e)_{13} = 0 + 0.69 = 0.69$$

$$\delta^2(T_E)_4 = \delta^2(T_E)_2 + \delta^2(t_e)_{24} = 0.25 + 0.44 = 0.69$$

jer smo $(T_E)_4$ odredili iz 2. događaja

$$\delta^2(T_E)_5 = \delta^2(T_E)_2 + \delta^2(t_e)_{25} = 0.25 + 0.69 = 0.94$$

$$\delta^2(T_E)_6 = \delta^2(T_E)_3 + \delta^2(t_e)_{36} = 0.69 + 0.25 = 0.94$$

$$\delta^2(T_E)_7 = \delta^2(T_E)_6 + \delta^2(t_e)_{67} = 0.94 + 1.04 = 1.98$$

jer smo $(T_E)_6$ odredili iz 6. događaja

- **najkasnije vreme ostvarenja događaja**

$$(T_L)_i = \min_j ((T_L)_j - (t_e)_{ji}), \quad (T_L)_n = (T_E)_n$$

$$(T_L)_7 = (T_E)_7 = 23.1$$

$$(T_L)_6 = \min((T_L)_7 - (t_e)_{67}) = \min(23.1 - 9.8) = 13.3$$

$$(T_L)_5 = \min((T_L)_7 - (t_e)_{57}) = \min(23.1 - 4.8) = 18.3$$

$$(T_L)_4 = \min((T_L)_7 - (t_e)_{47}) = \min(23.1 - 5.3) = 17.8$$

$$(T_L)_3 = \min((T_L)_4 - (t_e)_{34}; (T_L)_6 - (t_e)_{36}) = \\ = \min(17.8 - 3.3; \underline{13.3 - 6.8}) = 6.5$$

$$(T_L)_2 = \min((T_L)_4 - (t_e)_{24}; (T_L)_5 - (t_e)_{25}) = \\ = \min(17.8 - 6.3; \underline{18.3 - 7.5}) = 10.8$$

$$(T_L)_1 = \min((T_L)_2 - (t_e)_{12}; (T_L)_3 - (t_e)_{13}; (T_L)_4 - (t_e)_{14}) = \\ = \min(10.8 - 4.2; \underline{6.5 - 6.5}; 17.8 - 4.7) = 0$$

- **varijansa najkasnijeg vremena ostvarenja događaja**

$$\delta^2(T_L)_i = \delta^2(T_L)_j + \delta^2(t_e)_{ij}$$

$$\delta^2(T_L)_7 = \delta^2(T_E)_7 = 1.98$$

$$\delta^2(T_L)_6 = \delta^2(T_L)_7 + \delta^2(t_e)_{67} = 1.98 + 1.04 = 3.02$$

$$\delta^2(T_L)_5 = \delta^2(T_L)_7 + \delta^2(t_e)_{57} = 1.98 + 0.25 = 2.23$$

$$\delta^2(T_L)_4 = \delta^2(T_L)_7 + \delta^2(t_e)_{47} = 1.98 + 1 = 2.98$$

$$\delta^2(T_L)_3 = \delta^2(T_L)_6 + \delta^2(t_e)_{36} = 3.02 + 0.25 = 3.27$$

jer smo $(T_L)_3$ odredili iz 6. događaja

$$\delta^2(T_L)_2 = \delta^2(T_L)_5 + \delta^2(t_e)_{25} = 2.23 + 0.69 = 2.92$$

jer smo $(T_L)_2$ odredili iz 5. događaja

$$\delta^2(T_L)_1 = \delta^2(T_L)_3 + \delta^2(t_e)_{13} = 3.27 + 0.69 = 3.96$$

jer smo $(T_L)_1$ odredili iz 3. događaja

- **vremenska rezerva događaja**

$$S_i = (T_L)_i - (T_E)_i$$

$$S_1 = (T_L)_1 - (T_E)_1 = 0 - 0 = 0$$

$$S_2 = (T_L)_2 - (T_E)_2 = 10.8 - 4.2 = 6.6$$

$$S_3 = (T_L)_3 - (T_E)_3 = 6.5 - 6.5 = 0$$

$$S_4 = (T_L)_4 - (T_E)_4 = 17.8 - 10.5 = 7.3$$

$$S_5 = (T_L)_5 - (T_E)_5 = 18.3 - 11.7 = 6.6$$

$$S_6 = (T_L)_6 - (T_E)_6 = 13.3 - 13.3 = 0$$

$$S_7 = (T_L)_7 - (T_E)_7 = 23.1 - 23.1 = 0$$

- **varijansa očekivanih vremenskih rezervi**

$$\delta^2 S_i = \delta^2(T_E)_i + \delta^2(T_L)_i$$

$$\delta^2 S_1 = \delta^2(T_E)_1 + \delta^2(T_L)_1 = 0 + 3.96 = 3.96$$

$$\delta^2 S_2 = \delta^2(T_E)_2 + \delta^2(T_L)_2 = 0.15 + 2.92 = 3.17$$

$$\delta^2 S_3 = \delta^2(T_E)_3 + \delta^2(T_L)_3 = 0.69 + 3.27 = 3.96$$

$$\delta^2 S_4 = \delta^2(T_E)_4 + \delta^2(T_L)_4 = 0.69 + 2.98 = 3.67$$

$$\delta^2 S_5 = \delta^2(T_E)_5 + \delta^2(T_L)_5 = 0.94 + 2.23 = 3.17$$

$$\delta^2 S_6 = \delta^2(T_E)_6 + \delta^2(T_L)_6 = 0.94 + 3.02 = 3.96$$

$$\delta^2 S_7 = \delta^2(T_E)_7 + \delta^2(T_L)_7 = 1.98 + 1.98 = 3.96$$

- **kritični put - potpuni putevi i njihova vremena**

$$(12) (24) (47) \quad t_{12} + t_{24} + t_{47} = 4.2 + 6.3 + 5.3 = 15.8$$

$$(12) (25) (57) \quad t_{12} + t_{25} + t_{57} = 4.2 + 7.5 + 4.8 = 17.5$$

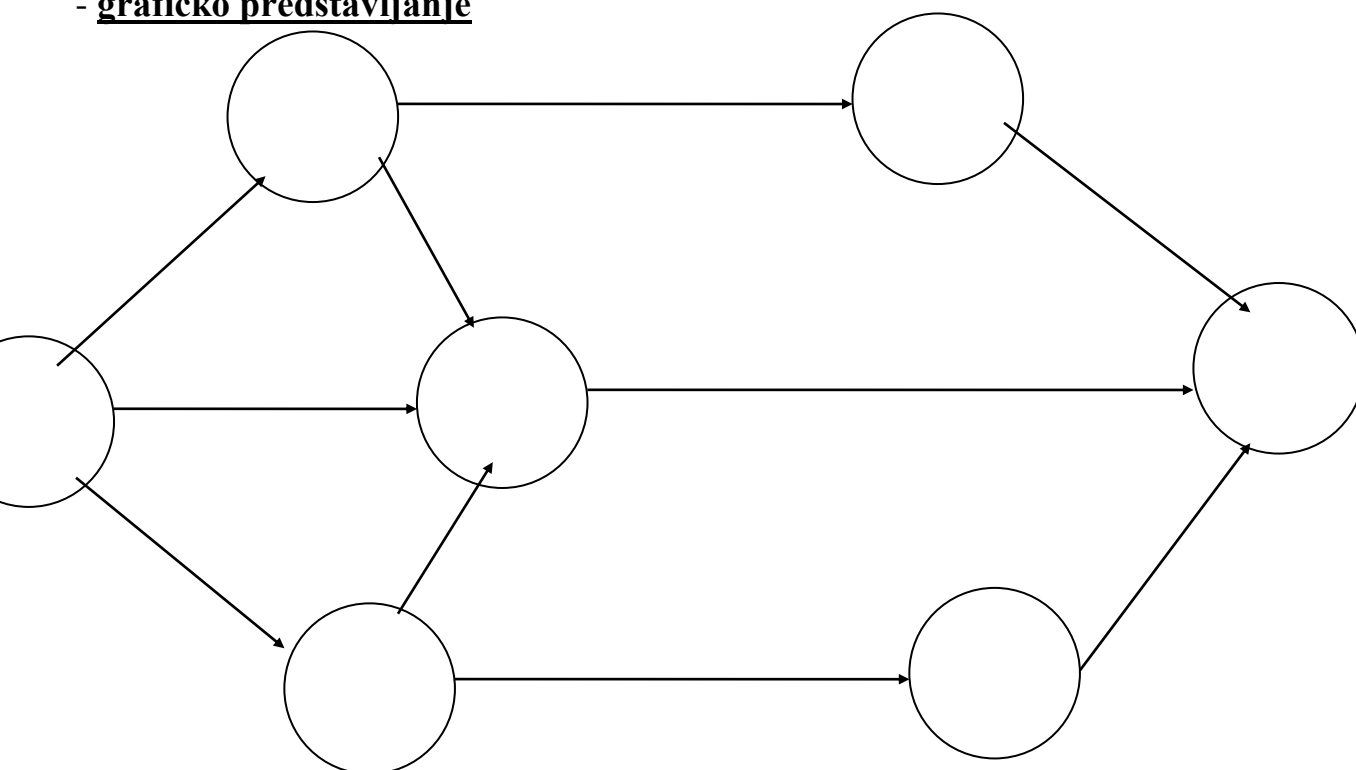
$$(13) (34) (47) \quad t_{13} + t_{34} + t_{47} = 6.5 + 3.3 + 5.3 = 15.1$$

$$(13) (36) (67) \quad t_{13} + t_{36} + t_{67} = 6.5 + 6.8 + 9.8 = \underline{23.1}$$

$$(14) (47) \quad t_{14} + t_{47} = 4.7 + 5.3 = 10.0$$

Kritični put čine događaji: 1 3 6 7

- **grafičko predstavljanje**



Varijanse očekivanih vremenskih rezervi kritičnih događaja su velike:

$$\delta^2 S_1 = 3.96 \quad \delta^2 S_3 = 3.96 \quad \delta^2 S_6 = 3.96 \quad \delta^2 S_7 = 3.96$$

što znači da se mogu očekivati velika odstupanja.

- **faktori na osnovu kojih se određuju verovatnoće da će vremenske rezerve biti očekivane vremenske rezerve za kritične događaje,** bili bi:

$$Z_i = \frac{S_i}{\sqrt{\delta^2(T_E)_i + \delta^2(T_L)_i}}$$

$$Z_1 = \frac{S_1}{\sqrt{\delta^2(T_E)_1 + \delta^2(T_L)_1}} = \frac{0}{\sqrt{0 + 3.93}} = 0$$

$$Z_3 = \frac{S_3}{\sqrt{\delta^2(T_E)_3 + \delta^2(T_L)_3}} = \frac{0}{\sqrt{0.69 + 3.27}} = 0$$

$$Z_6 = \frac{S_6}{\sqrt{\delta^2(T_E)_6 + \delta^2(T_L)_6}} = \frac{0}{\sqrt{0.94 + 3.02}} = 0$$

$$Z_7 = \frac{S_7}{\sqrt{\delta^2(T_E)_7 + \delta^2(T_L)_7}} = \frac{0}{\sqrt{1.98 + 1.98}} = 0$$

Na osnovu tablica verovatnoće za normalnu raspodelu i faktora Z_1 , Z_3 , Z_6 i Z_7 , verovatnoće da se ostvare izračunate vremenske rezerve, bile bi:

$$P_1=0,50 \quad P_3 = 0,50 \quad P_6=0,50 \quad P_7=0,50$$

Znači da se sa verovatnoćom 0,5, odnosno 50% može očekivati da su događaji 1, 3, 6 i 7 ktirični.

- **za nekritične događaje** se takođe mogu odrediti verovatnoće ostvarenja očekivane vremenske rezerve

$$Z_2 = \frac{S_2}{\sqrt{\delta^2(T_E)_2 + \delta^2(T_L)_2}} = \frac{6.6}{\sqrt{0.25 + 2.92}} = 3, \dots \quad Z_4 = \frac{S_4}{\sqrt{\delta^2(T_E)_4 + \delta^2(T_L)_4}} = \frac{7.3}{\sqrt{0.69 + 2.98}} = 3, \dots$$

$$Z_5 = \frac{S_5}{\sqrt{\delta^2(T_E)_5 + \delta^2(T_L)_5}} = \frac{6.6}{\sqrt{0.94 + 3.02}} = 3, \dots$$

Prema tablicama za normalnu raspodelu, verovatnoća da se postignu očekivane vremenske rezerve bile bi: $P_2=1$ $P_4=1$ $P_5=1$

Očekivane vremenske rezerve događaja 2, 4 i 5 su velike, pa je verovatnoća da se one ostvare visoka.

- **određivanje verovatnoće da se projekat ostvari u predviđenom roku**

- NPR. usvajamo da će se projekat završiti za 25 vremenskih jedinica. Odgovarajući faktor bi bio:

$$Z_i = T^0_i - (T_E)_i / \delta^2(T_E)_i$$

$$Z_7 = T^0_7 - (T_E)_7 / \delta^2(T_E)_7 = 25 - 23.1 / 1.98 = 0.95$$

gde je: $T^0_7 = 25$, pa je $P_7 = 0,95$, što znači da će se projekat realizovati za 25 vremenskih jedinica sa verovatnoćom od 95%.

- NPR. usvajamo da će se projekat realizovati za 21 vremensku jedinicu.

$$Z_7 = T^0_7 - (T_E)_7 / \delta^2(T_E)_7 = 21 - 12.3 / 1.98 = -1.06$$

pa je $P_7 = 0.024$, što znači da će se projekat realizovati za 21 vremensku jedinicu sa verovatnoćom od 2%.