Težište

- Definicija težišta
- Koordinate težišta za Dekartov koordinatni sistem
- Težište dvodimenzionih tela
- Težište jednodimenzionih tela
- Načini određivanja težišta

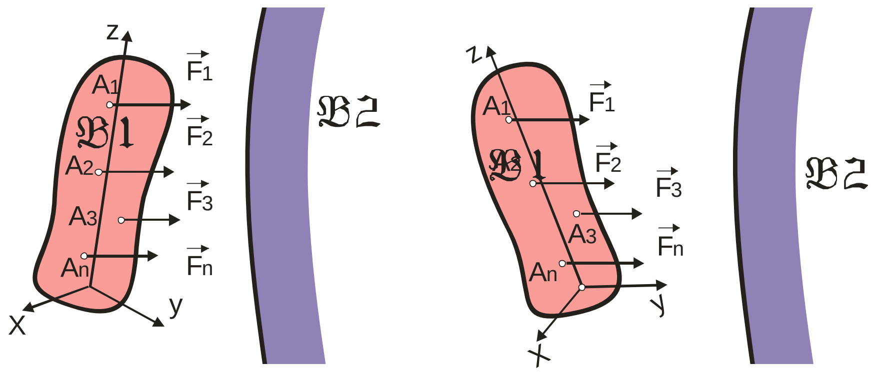
Definicija težine

- Zemlja na sve deliće svakog tela deluje gravitacionim silama koje nazivamo težinom tela
- Težine delića tela predstavljaju sistem vezanih paralelnih sila
- Njihova rezultanta se zove ***težina tela***

$$G = \sum_{i=1}^{n} \Delta G_i$$

Težina tela

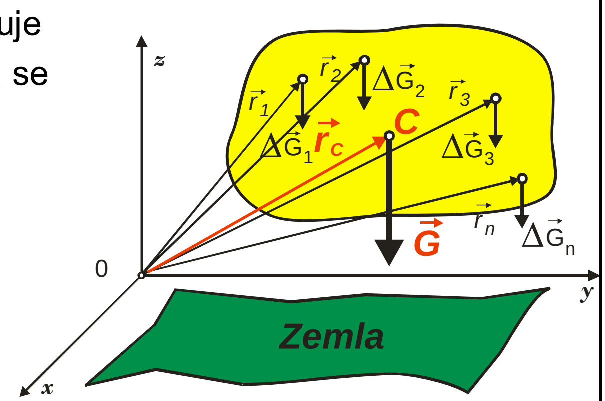
- Ako se telo zaokrene za neki ugao u odnosu na zemlju, težine delića ostaće paralelne i zadržaće iste intenzitete pravce i smerove



Definicija težišta

- Rezultanta težina delića tela, ***težina tela***, deluje u jednoj tački
- Tačka u kojoj deluje težina tela naziva se

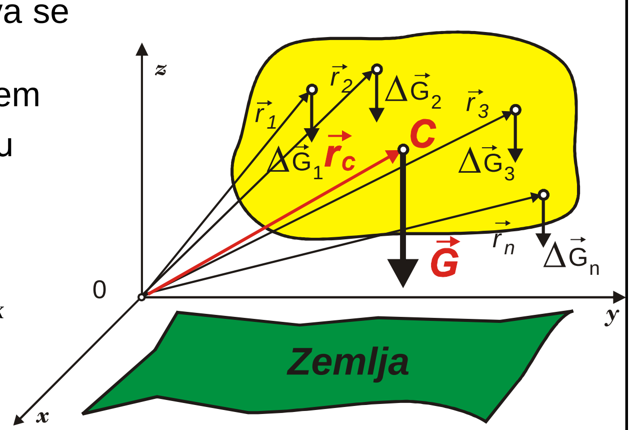
  težište



Položaj težišta u prostoru

- Koordinatni sistem koji je nacrtan naziva se DEKARTOV koordinatni sistem
- Položaj težišta u prostoru

$$\vec{r}_C = \frac{1}{G}\sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \Delta G_k$$



Specifična težina

Telo može biti:

- homogeno (istih svojstava po čitavoj zapremini)

$$\gamma = const.$$

$$\gamma = \frac{\Delta G}{\Delta V}$$

- Nehomogeno (osobine tela se menjaju po zapremini)

$$\gamma = \gamma(x, y, z) \neq const.$$

Položaj težišta u prostoru

- Za telo konačnih dimenzija najbolje je telo izdeliti na što više delića čija zapremina postaje elementarno mala, a položaj tačno određen
- Za ***HOMOGENO*** telo $\gamma = const.$

  Specifična težina je ista za sve deliće tela

  Ukupna težina je jednaka zbiru težina delića

$$G = \gamma \int_V dV = \gamma \cdot V$$

γ – specifična težina N/m^3

Položaj težišta homogenog tela u prostoru

- Za Dekartov koordinatni sistem Oxyz za homogeno telo

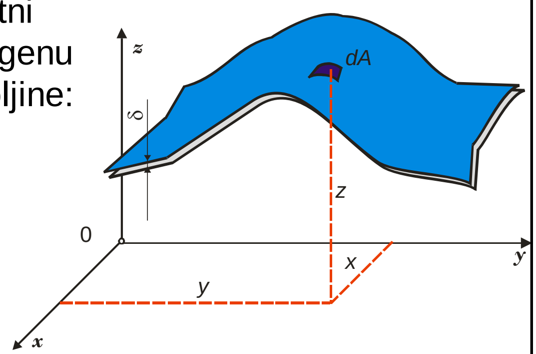
$$G = \gamma \int_V dV = \gamma \cdot V$$

$$\gamma = const. \Rightarrow \vec{r}_c = \frac{1}{V} \int_v \vec{r} dV$$

$$x_C = \frac{1}{V} \int_v x dV; \quad y_C = \frac{1}{V} \int_v y dV; \quad z_C = \frac{1}{V} \int_v z dV$$

Položaj težišta dvodimenzionalnog tela

- Za Dekartov koordinatni sistem Oxyz za homogenu ljusku konstantne debljine:



dA – element površine srednje površi ljuske

G – težina tela

$$\delta = const. \Rightarrow dV = \delta dA \Rightarrow G = \int_V \gamma dV = \int_A \gamma' dA$$

$$x_C = \frac{1}{A}\int_A x dA; \quad y_C = \frac{1}{A}\int_A y dA; \quad z_C = \frac{1}{A}\int_A z dA$$

Položaj težišta homogene ravne ploče konstantne debljine

- Srednja ravan ploče je u ravni xOy
- Za Dekartov koordinatni sistem Oxyz, za homogenu ljusku konstantne debljine:

$$x_C = \frac{1}{A}\int_A x dxdy;$$

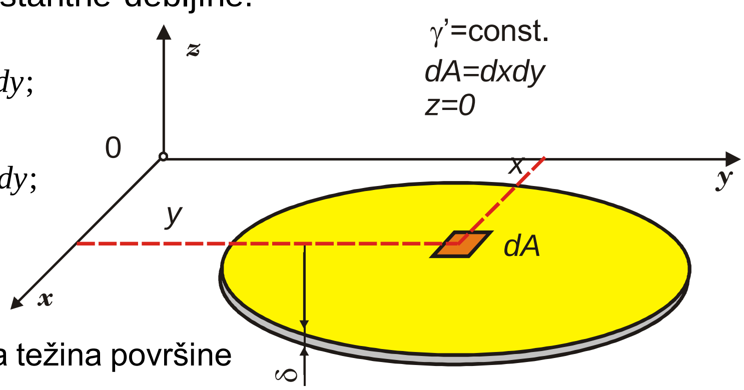
$$y_C = \frac{1}{A}\int_A y dxdy;$$

$$z_C = 0$$

γ'=const.

dA=dxdy

z=0



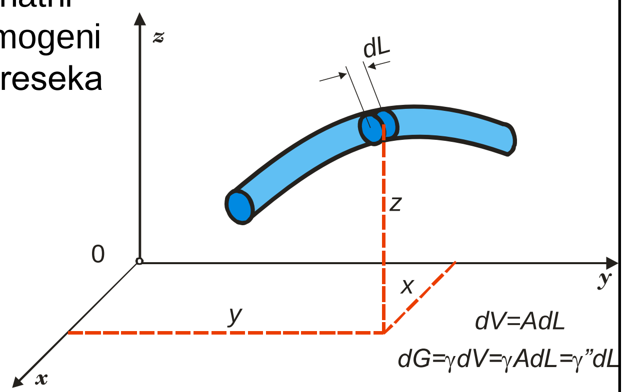
γ' – specifična težina površine N/m^2

Položaj težišta jednodimenzionog tela

Za Dekartov koordinatni sistem Oxyz za homogeni štap konstantnog preseka

dL –element dužine štapa

γ" – specifična težina dužine N/m



$$x_C = \frac{1}{L}\int_L x dL; \quad y_C = \frac{1}{L}\int_L y dL; \quad z_C = \frac{1}{L}\int_L z dL$$

Načini određivanja težišta

- Simetrija
- Rastavljanje na konačne delove
- Metod negativnih težišta
- Eksperimentalne metode
- Metode integracija
- Papos-Guldinove teoreme

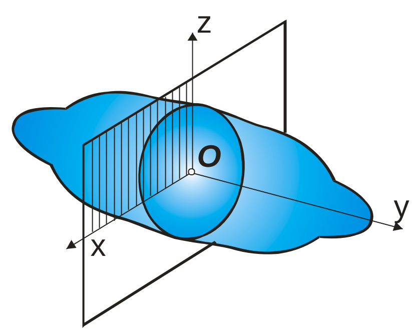
Simetrija

- Za telo koje ima simetričan geometrijski oblik (određen spoljašnjim granicama) kaže se da poseduje geometrijsku simetriju. Ako je telo homogeno (γ=const), telo ima materijalnu simetriju.

Simetrija - TEOREMA 1

- TEOREMA 1

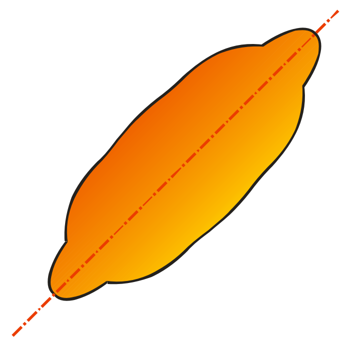
Težište tela koje ima ravan materijalne simetrije nalazi se u ovoj ravni



Simetrija - TEOREMA 2

- TEOREMA 2

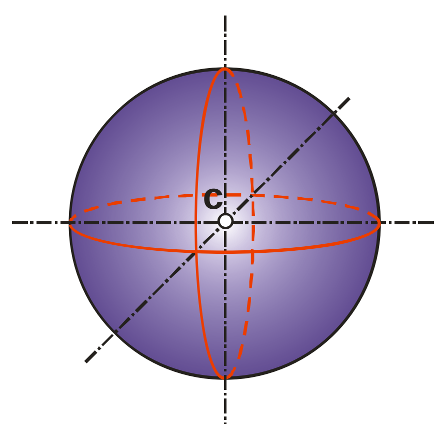
  Ako homogeno telo ima jednu osu simetrije onda se težište C nalazi na toj osi simetrrije



Simetrija - TEOREMA 3

- TEOREMA 3

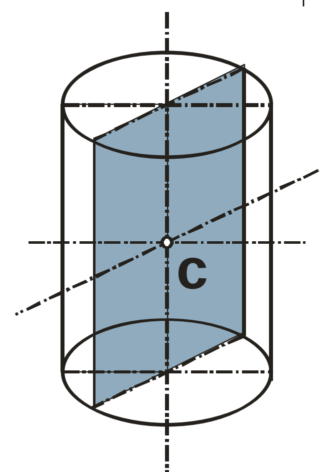
  Ako homogeno telo ima centar simetrije, to jest ako ima dve ili više osa simetrije, težište C se nalazi u centru simetrije, tj. u preseku osa simetrije



Simetrija - TEOREMA 3

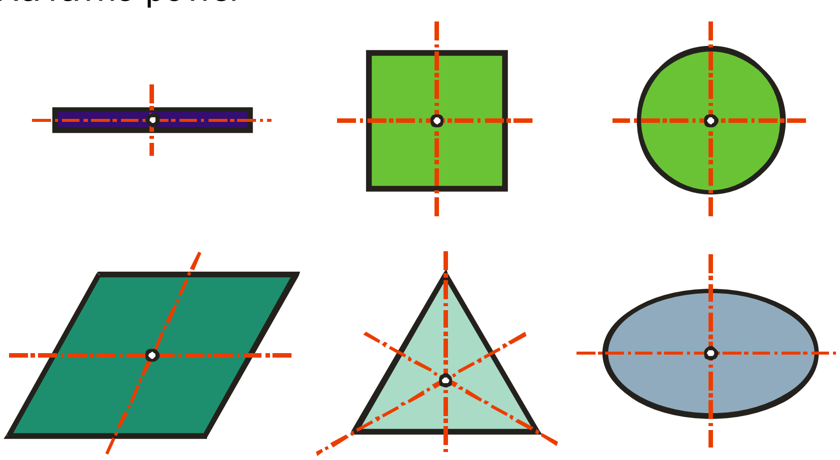
- TEOREMA 3

  Ako homogeno telo ima centar simetrije, to jest ako ima dve ili više osa simetrije, težište C se nalazi u centru simetrije, tj. u preseku osa simetrije



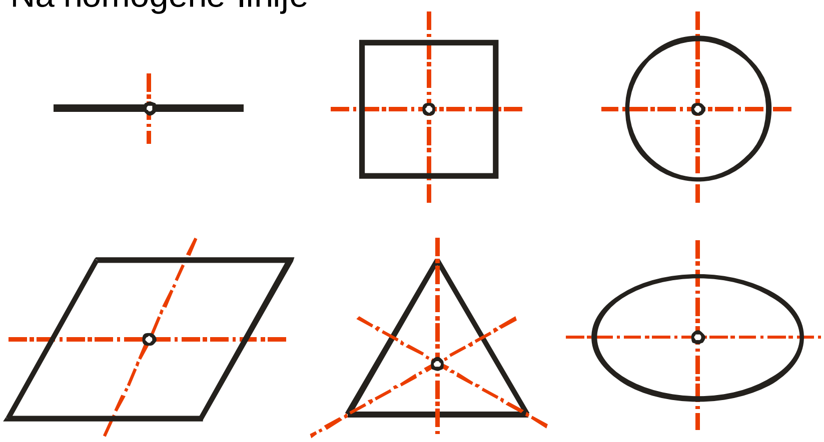
Primeri primene simetrije

Na ravne površi



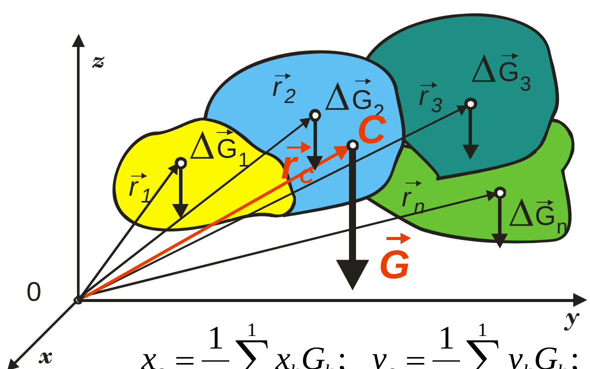
Primeri primene simetrije

Na homogene linije



Rastavljanje na konačne delove

Položaj težišta tela koje se sastoji od konačnog broja delova koji se međusobno razlikuju oblikom ili materijalom



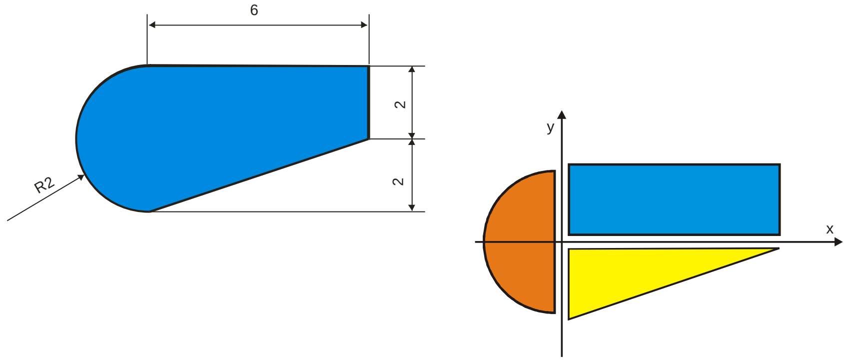
$$\vec{r}_C = \frac{1}{G}\int_V \vec{r}_k \gamma_k dV_k$$

$$\vec{r}_C = \frac{1}{G}\sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \cdot G_k$$

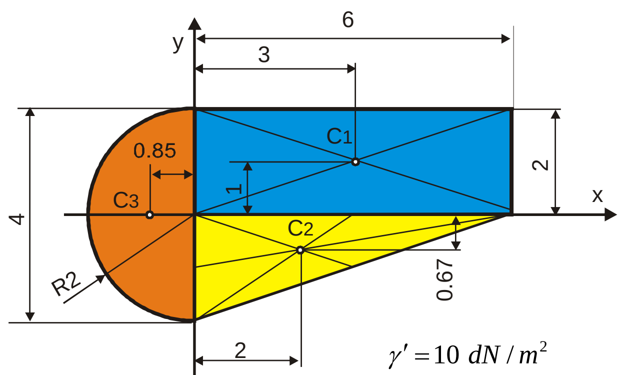
$$x_c = \frac{1}{G}\sum_{k=1}^{1} x_k G_k; \quad y_c = \frac{1}{G}\sum_{k=1}^{1} y_k G_k; \quad z_c = \frac{1}{G}\sum_{k=1}^{1} z_k G_k$$

Primer rastavljanja na konačne delove

Složenu površinu rastaviti na više prostih, u ovom primeru tri,
za koje su poznati položaji težišta ponaosob za svaku površinu



Brojni primer rastavljanja na konačne delove poznatih oblika i dimenzija



$$\gamma' = 10\ dN/m^2$$

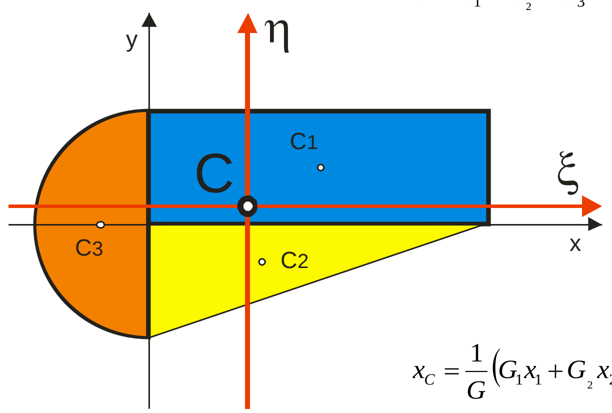
$$G_1 = A_1 \cdot \gamma' = 12 \cdot 10 = 120\ dN\ \ C_1(3;1)$$

$$G_2 = A_2 \cdot \gamma' = 6 \cdot 10 = 60\ dN\ \ C_2(2;-0.67)$$

$$G_3 = A_2 \cdot \gamma' = 6{,}28 \cdot 10 = 62.8\ dN\ C_3(-0.85;0)$$

Brojni primer rastavljanja na konačne delove poznatih oblika i dimenzija

$$G = G_1 + G_2 + G_3 = 120 + 60 + 62.8 = 242.8\ dN$$



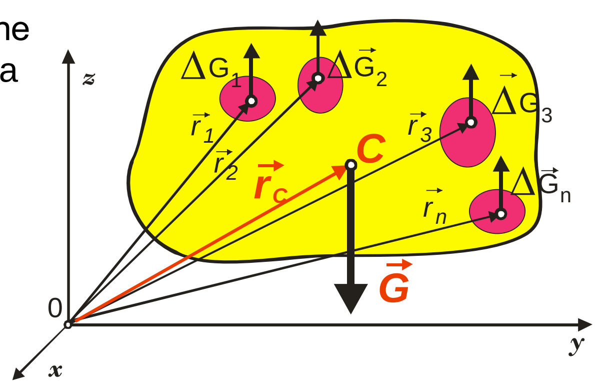
$$x_C = \frac{1}{G}\left(G_1 x_1 + G_2 x_2 + G_3 x_3\right) = \frac{426.6}{242.8} = 1.75\,m$$

$$y_C = \frac{1}{G}\left(G_1 y_1 + G_2 y_2 + G_3 y_3\right) = \frac{79.8}{242.8} = 0.32\ m$$

Metod negativnih težišta

primenjuje se na telo sa šupljinama

Težina materije koja bi popunjavala k-tu šupljinu ima suprotan smer od smera težine punog tela, a vezana je za težište dela u šupljini

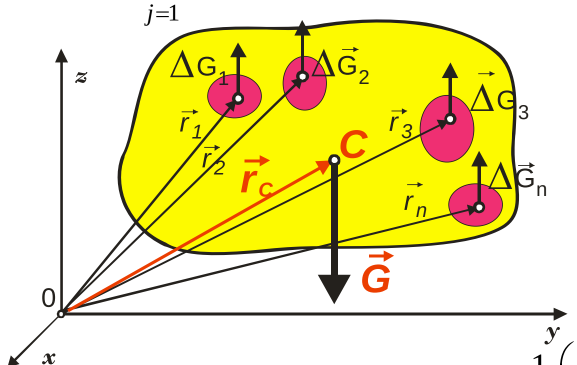


Metod negativnih težišta

primenjuje se na telo sa šupljinama

$$G = G_T - \sum_{j=1}^{n} G_j$$

Težina je težina tela koje nema šupljine umanjena za težine šupljna

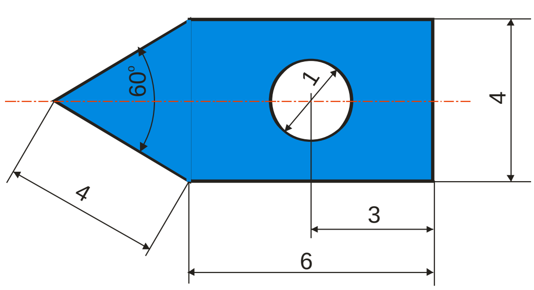


$$\vec{r}_c = \frac{1}{G}\left(\vec{r}_T G_T - \sum_{j=1}^{n} \vec{r}_j G_j\right)$$

Primer negativnih težišta

Složena ravna ploča ima otvor prečnika 1 m. Odrediti njeno težište, $\gamma' = 10 dN/m^2$

Uočava se osa simetrije pa treba odrediti samo jednu koordinatu



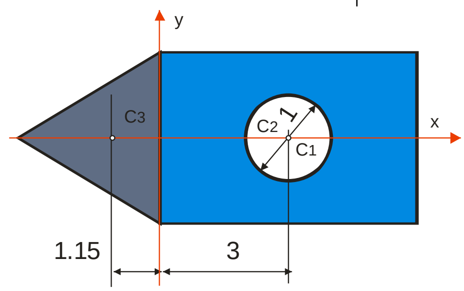
Primer negativnih težišta

$$x_c = \frac{G_1 \cdot x_1 - G_2 \cdot x_2 + G_3 \cdot x_3}{G_1 - G_2 + G_2}$$

Mogu se uočiti tri definisane površine: trougao, pravougaonik i izbušeni otvor.

Sva tri težišta leže na osi simetrije koju obeležimo sa x,

Proizvoljno biramo y na osnovici trougla i kraćoj strani pravougaonika



$$x_c = \frac{240 \cdot 3 - 7.85 \cdot 3 + 6.928 \cdot (-1.154)}{301.43}$$

$$x_c = 2.283m; \quad y_c = 0$$

$$G = \gamma' A = \gamma'(A_1 - A_2 + A_3) = 301.43dN$$

$$A_1 = 24m^2;\ G_1 = \gamma' A_1 = 240dN; \quad x_1 = 3m;\ y_1 = 0$$

$$A_2 = -0.785m^2;\ G_2 = -\gamma' A_2 = -7.85dN; \quad x_2 = 3m;\ y_2 = 0$$

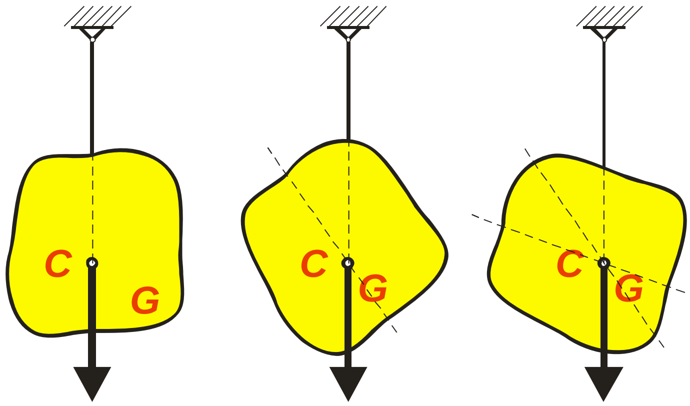
$$A_3 = 6.928m^2;\ G_3 = \gamma' A_3 = 69.28dN; \quad x_3 = -1.154m;\ y_3 = 0$$

Eksperimentalne metode

- Za heterogena tela veoma komplikovanog oblika i strukture težište tela se može odrediti eksperimentalno
- Za eksperimentalno određivanje težišta razvijeno je više metoda, a neke su:
  - Kačenjem tereta o jedno uže u najmanje dva merenja
  - Kačenjem o dva užeta
  - Merenje na vagama

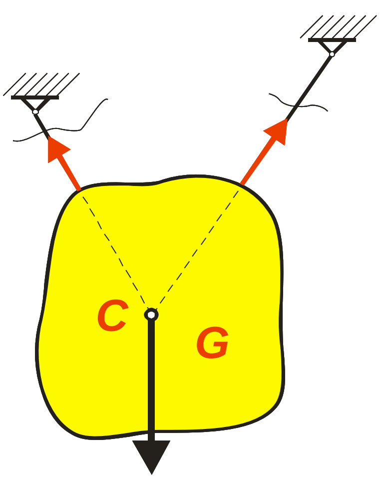
Eksperimentalne metode

Kačenjem tereta o jedno uže u najmanje dva merenja

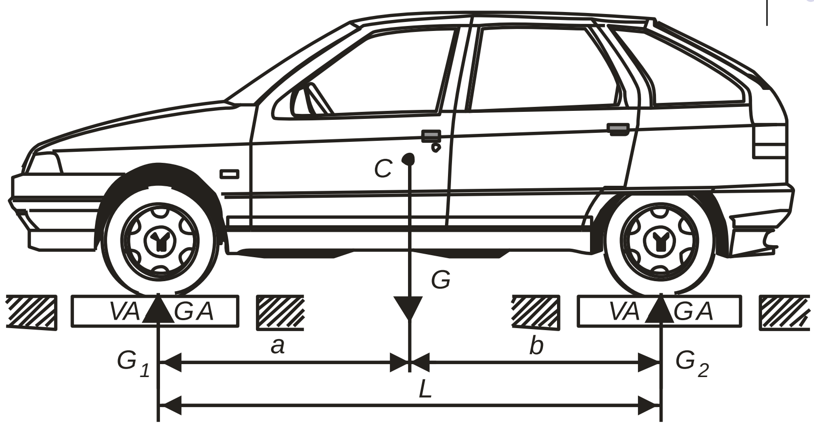


Eksperimentalne metode

Kačenjem o dva užeta



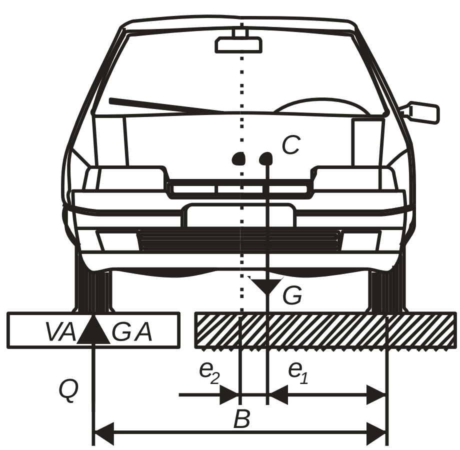
Eksperimentalne metode na vagama



$$G = G_1 + G_2$$

$$M_A = G \cdot a - G_2 \cdot L = 0 \Rightarrow a = \frac{G_2}{G} \cdot L$$

Eksperimentalne metode na vagama



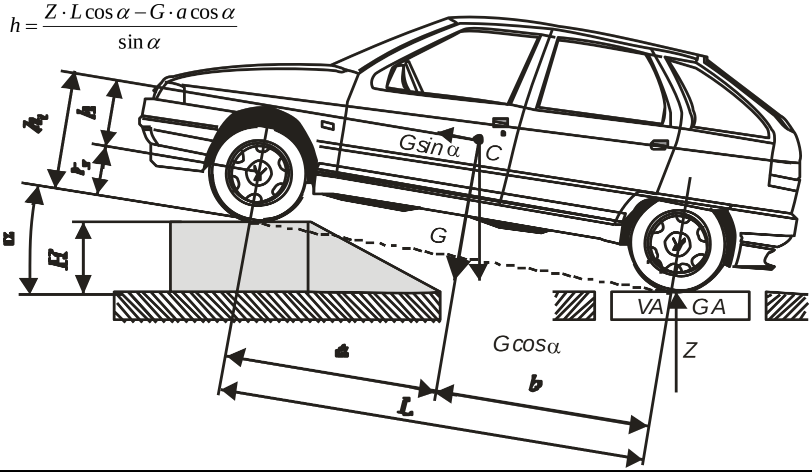
$$M_A = G \cdot e_1 - Q \cdot B = 0 \Rightarrow e_1 = \frac{Q}{G} \cdot B$$

Eksperimentalne metode na vagama

$$M_B = Z \cdot L\cos\alpha - G(a\cos\alpha + h\sin\alpha) = 0$$

$$tg\alpha = \frac{H}{\sqrt{L^2 - H^2}}$$

$$h = \frac{Z \cdot L\cos\alpha - G \cdot a\cos\alpha}{\sin\alpha}$$



Metode integracije

- Za određene matematički definisane zapremine, površine i linije može se metodom integracije odrediti težište te figure
- Za uobičajene slike i linije ovo je urađeno i tabelarno sređeno tako da se po potrebi uzimaju gotovi izrazi

Metode integracije

Težište kružnog luka ugla $\pi/2$ rad

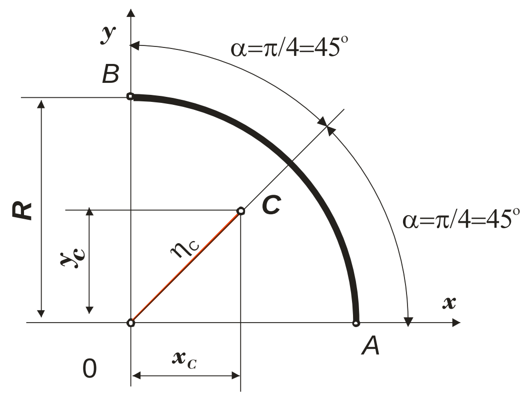
Dužina kružnog luka nad uglom $2\alpha=\pi/2$ odnosno $\alpha=\pi/4$

$$L = R \cdot 2\alpha = \frac{R \cdot \pi}{2}$$

Težište po obrascu

$$\eta_C = \frac{2\sqrt{2}R}{\pi}$$

$$x_c = y_c = \frac{2R}{\pi}$$



Metode integracije

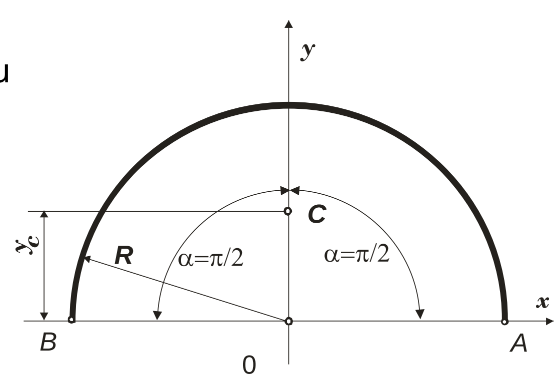
Težište kružnog luka ugla π rad

Dužina kružnog luka nad uglom $2\alpha=\pi$ odnosno $\alpha=\pi/2$

$$L = R \cdot 2\alpha = R \cdot \pi$$

Težište po obrascu

$$y_c = \frac{R\sin\alpha}{\alpha} = \frac{R \cdot 1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2R}{\pi}$$

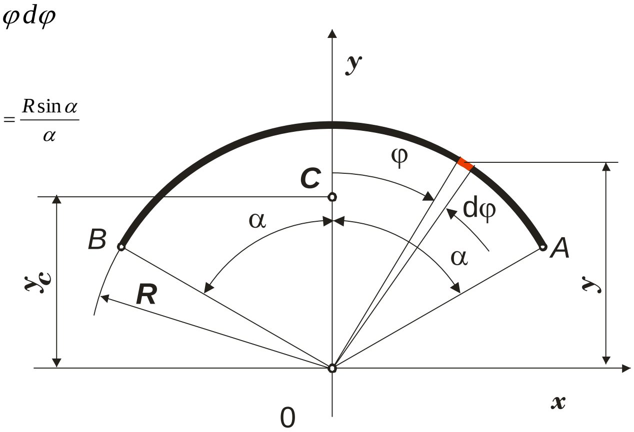


Metode integracije
Težište kružnog luka

Dužina kružnog luka $L = R\cdot\alpha$; gde je α u rad

$y = R\cdot\cos\alpha;\; dL = R\varphi d\varphi$

$$y_c = \frac{1}{L}\int_L y dL = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} R^2\cos\varphi d\varphi}{R2\alpha} = \frac{R\sin\alpha}{\alpha}$$



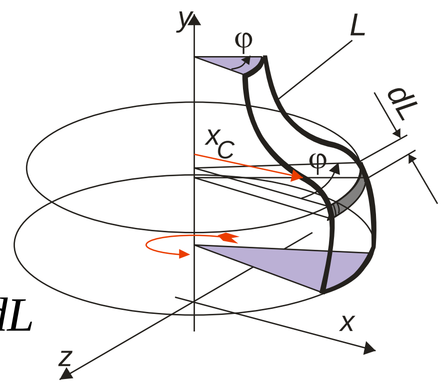
Papos-Guldinove teoreme

- **Teorema 1:**

  Površina koja se dobija obrtanjem neke ravne linije oko ose koja leži u ravni linije, a ovu ne preseca, jednaka je proizvodu ugla obrtanja, dužine linije i normalnog rastojanja težišta linije od ose obrtanja

$$dA = x\cdot\varphi\cdot dL$$

Obrtna površina oko y ose



$$dA_y = x\,\varphi\,dL$$

$$A_y(\varphi) = \int dA_y = \varphi \int_L x\,dL$$

$$A_y(\varphi) = x_c\,\varphi\,L$$

Papos-Guldinove teoreme

- **Teorema 2:**

  Zapremina tela koja se dobija obrtanjem neke ravne površine oko ose koja leži u ravni površine a ovu ne preseca jednaka je proizvodu ugla obrtanja, površine i normalnog rastojanja težišta linije od ose obrtanja

$$dV = x \cdot \varphi \cdot dA$$

Rezime

- rezultanta sila gravitacije na sve deliće telase zove ***težina tela***
- Homogeno telo koje ima geometrijsku osu simetrije ima i materijalnu osu simetrije
- Ako homogeno telo ima centar simetrije, to jest ako ima dve ili više osa simetrije, težište C se nalazi u centru simetrije, tj. u preseku osa simetrije
- Određivanje položaja težišta – simetrija, eksperimentalne metode, metoda podele na konačan broj elemenata, metode integracija
- Papos-Guldinove teoreme o obrtnoj površini i obrtnoj zapremini