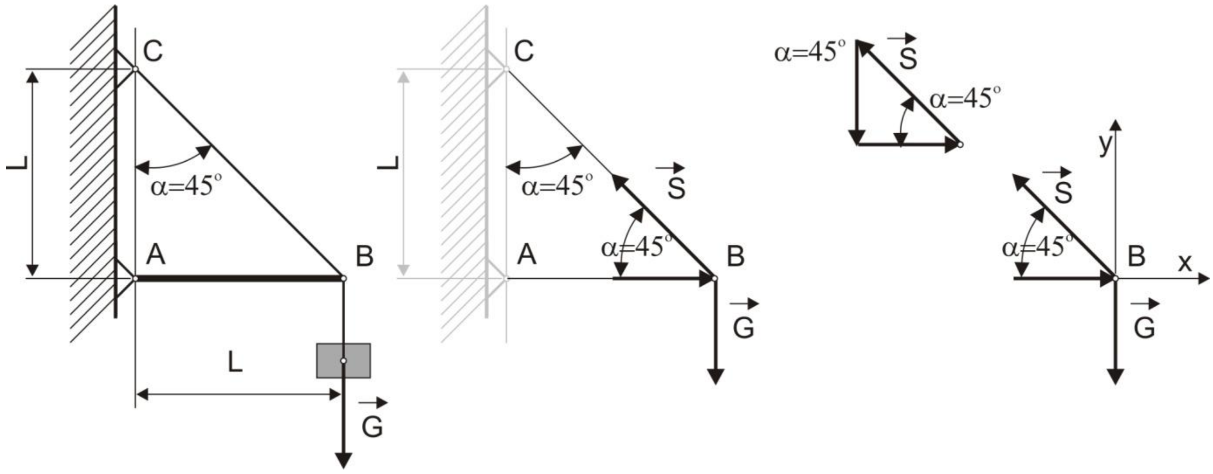
Primer 1.5

Teret težine $\vec{G} = 100N$ zakačen je idealno neistegljivo elastično na kraj lakog horizontalnog štapa B. Drugi kraj štapa je zglobno vezan u tački A. U tački B je zakačeno idealno neistegljivo elastično uže. Svojim drugim krajem uže je vezano za vertikalni zid u tački C koja je vertikalno iznad tačke A. Ugao koji zaklapa uže sa vertikalom je α=45°. Dužina štapa je L, a kako je laki štap to je njegova težina zanemarljiva. Rastojanje tačaka $\overline{AC} = L$.



Iz trougla sila može se uočiti:

$tg\alpha = \frac{G}{F_A} = tg45° = 1 \rightarrow F_A = G = 100N$

$sin\alpha = \frac{F_A}{S} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow S = \sqrt{2} \cdot F_A = \sqrt{2} \cdot G = 141.42N$

Drugi način:

$\sum X_i = 0 = X_1 + X_A = -Scos45° + F_A = 0 \rightarrow F_A = Scos45° = S\frac{\sqrt{2}}{2}$

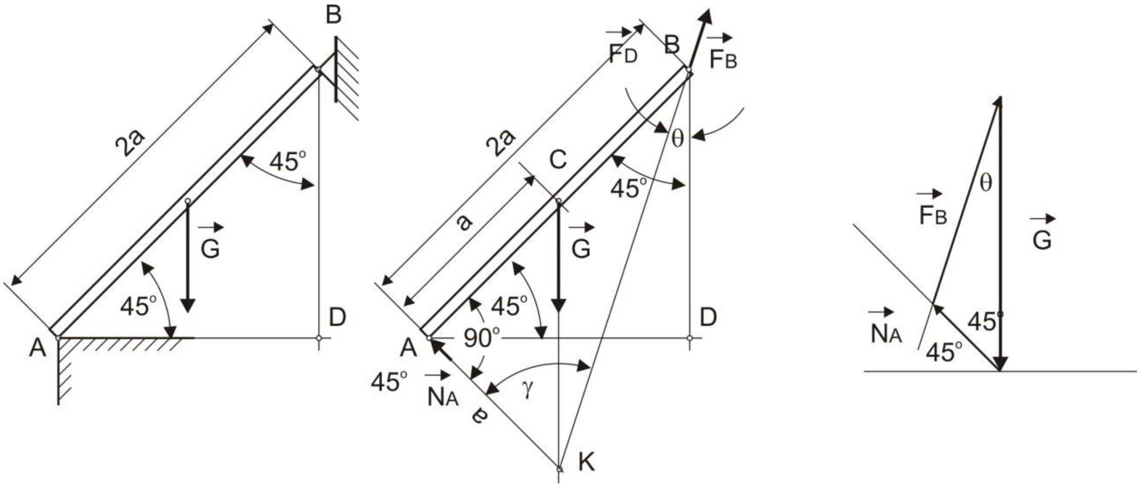
$\sum Y_i = 0 = Y_A - G = Ssin45° - G = 0 \rightarrow S = \frac{G}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} \cdot G$

$S = \sqrt{2} \cdot G = 141.42N$

$F_A = S\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \cdot G \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = G = 100\ N$

Primer 1.6

Homogena greda AB dužine 2a i težine G, vezana je krajem B za nepokretan zglob, dok je krajem A oslonjena na ivicu. Greda je glatka a u položaju ravnoteže leži u vertikalnoj ravni, i gradi sa vertikalom i horizontalom uglove od 45°. Odrediti reakcije zgloba B i ivice A.



Na gredu deluju tri sile jedna aktivna G i dve pasivne reakcija veze nepokretnog zgloba – sila u ravni FB i sila reakcije glatkog oslonca NA, upravna na gredu.
Pošto na gredu deluju tri sile a sistem je u ravnoteži, prema teoremi o ravnoteži tela pod dejstvom tri sile, sile moraju biti sučeljne. Sučeljne znači da ako im se produže pravci dejstva moraju imati zajedničku presečnu tačku, označenu na crtežu sa K.
Iz ovog uslova određuje se pravac dejstva reakcije zglobne veze B.
Pošto je telo u ravnoteži trougao sila mora biti zatvoren, pa se kao rezultat dobijaju intenzitetireakcija.
Analitički zadatak se rešava na više načina.
Jedan način je iz analize trouglova odrediti

$$tg(45° - \theta) = \frac{\overline{AK}}{\overline{AB}} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \to (45° - \theta) = artg\frac{1}{2} = 26.565° \to \theta = 18.435°$$

Trougao koga obrazuju sile ima uglove θ, ugao od 45° i treći ugao od

$180 - 45 - \theta = 116.565°$,

primenom sinusne teoreme:

$$\frac{N_A}{sin\theta} = \frac{F_B}{sin\,45°} = \frac{G}{sin\,(116.565)}$$

Odavde

$$N_A = \frac{Gsin\theta}{sin\,(116.565)°} = 0.3535G$$

$$F_B = \frac{Gsin\,45°}{sin\,(116.565)°} = 0.79057G$$

Drugi način rešavanja je primenom uslova ravnoteže

1. $\sum X_i = 0 = -N_A cos45° + X_B = 0$
2. $\sum Y_i = 0 = N_A sin45° - G + Y_B = 0$
3. $\sum M_B = 0 = -N_A 2a \cdot +Ga \cdot cos45° = 0$

Iz 3 sledi $N_A = \frac{G \cdot a \cdot cos\,45°}{2a} = \frac{G\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{G\sqrt{2}}{4}$

Iz 2 $Y_B = (G - N_A sin45°) = \left(G - \frac{G\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3G}{4}$

Iz 1 $X_B = N_A cos45° = \frac{G\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{G}{4}$

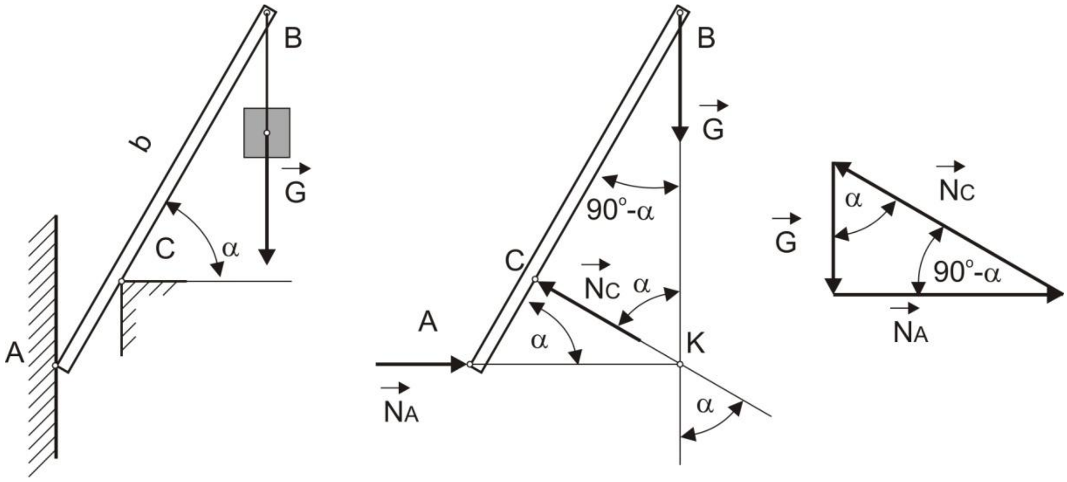
$$F_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = \sqrt{\left(\frac{G}{4}\right)^2 + \left(\frac{3G}{4}\right)^2} = G\frac{\sqrt{10}}{4} = 0.7905G$$

$$cos\theta = \frac{Y_B}{F_B} = \frac{\frac{3G}{4}}{G\frac{\sqrt{10}}{4}} = \frac{3\sqrt{10}}{10} = 0.94868$$

$$\theta = arcos0.94868 = 18.4349°$$

Primer 1. 7

Štap AB dužine L zanemarljive težine, na čijem kraju B je obešen teret M težine G, oslanja se glatkim krajem A na vertikalni glatki ravan zid, a u tački C na ivicu. Rastojanje AC je b/4. Odrediti reakcije veze ako štap obrazuje ugao α =60^o sa horizontalom.



Da bi sistem bio u ravnoteži moraju biti zadovoljena dva uslova

Ako na telo deluju tri sile da bi bilo u ravnoteži te tri sile moraju biti sučeljne.

Znači da:

- pravac normalne reakcije u tački A normala na zid
- normalne reakcije u tački C normale na štap i
- vertikalan pravac iz tačke B moraju se seći u istoj tački

Ove sile mopraju obrazovati zatvoren trougao sila

Otuda proizilazi da je položaj tačke C definisan pošto se pravac sile Na i G seku u tački K to i normala iz tačke C na štap mora proći kroz K

Odnosno sa slike

$\overline{AK} = bcos\alpha$

$\overline{AC} = \overline{AK}cos\alpha = bcos\alpha \cdot cos\alpha = b \cdot cos^2\alpha$

$\alpha = 60° \to cos60° = \frac{1}{2} \to cos^2 = \frac{1}{4}$

Postavkom je dato $\overline{AC} = \frac{1}{4}b$ to je ovo ispunjeno dobijaju se rešenja iz trougla sila

$$tg\alpha = \frac{N_A}{G} \to N_A = Gtg\alpha$$

$$cos\alpha = \frac{G}{N_C} \to N_c = \frac{G}{cos\alpha}$$

Rešenje primenom uslova ravnoteže:

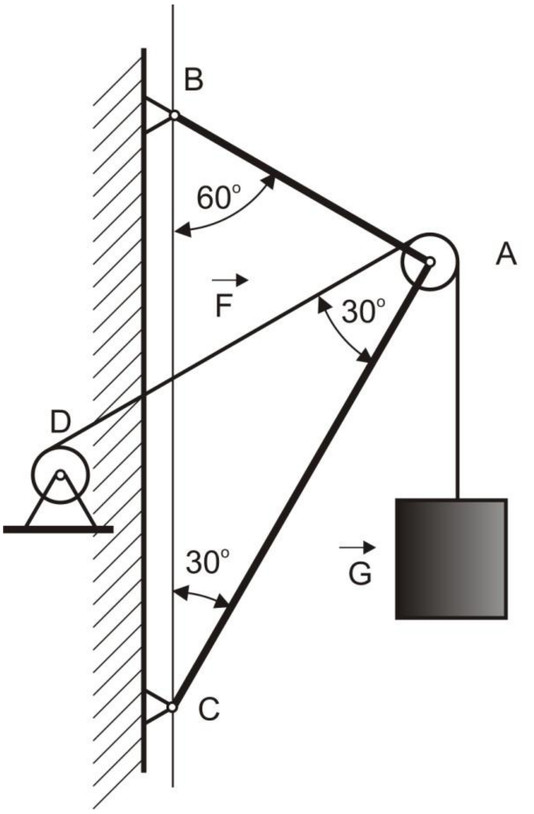
1. $\sum X_i = 0 = N_A - N_C sin\alpha = 0 \to N_A = N_c sin\alpha$
2. $\sum Y_i = 0 = N_C cos\alpha - G = 0 \to N_C = \frac{G}{cos\alpha} \to N_A = N_c sin\alpha = \frac{Gsin\alpha}{cos\alpha} = Gtg\alpha$

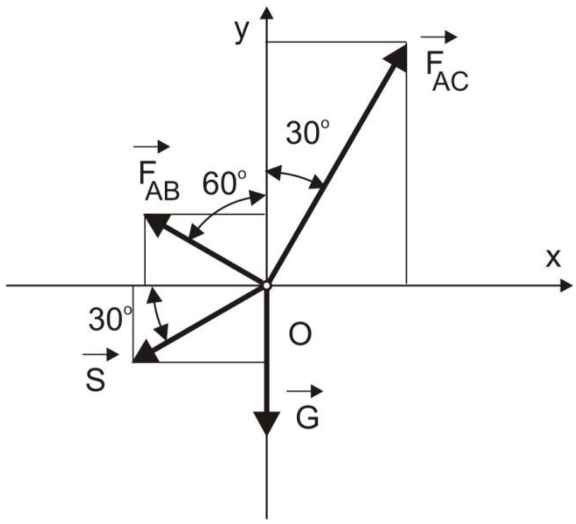
Uslov ravnoteže da rastojanje AC bude

3. $\sum M_A = 0 = Gbcos\alpha - N_C\frac{b}{4} = 0 \to \overline{AC} = \frac{Gbcos\alpha}{N_C} = \frac{Gbcos\alpha}{\frac{G}{cos\alpha}} = bcos^2\alpha$

Primer 1. 8

Teret težine 2 kN održava se u položaju ravnoteže nerastegljivim užetom koje je prebačeno preko kotura A zanemarljivih dimenzija, a namotano je na nepokretan kotur D. Štapovi AB i AC su zglobno vezani u tački A, a isto tako zglobno vezani za zid u tačkama B i C gradeći sa njim uglove od 60^o odnosno 30^o. Odrediti reakcije veze štapova ako se njihova težina zanemaruje. Uže AD gradi sa Štapom AC ugao od 30^o.





Iz ravnoteže užeta preko kotura bez trenja

S=G

1) $\sum X_i = F_{AC} sin30° - F_{AB} sin60° - Scos30° = 0$

2) $\sum Y_i = F_{AC} cos30° + F_{AB} cos60° - Ssin30° - G = 0$

Iz 1) i zamenom S=G dobija se

$$F_{AC}\frac{1}{2} - F_{AB}\frac{\sqrt{3}}{2} - G\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \; odnosno \; F_{AC} = \sqrt{3}(G + F_{AB})$$

$$\sqrt{3}(G + F_{AB})\frac{\sqrt{3}}{2} - F_{AB}\frac{1}{2} - G\frac{1}{2} - G = 0$$

$$\frac{3}{2}G + \frac{3}{2}F_{AB} - F_{AB}\frac{1}{2} - G\frac{1}{2} - G = 0 \rightarrow F_{AB} = 0$$

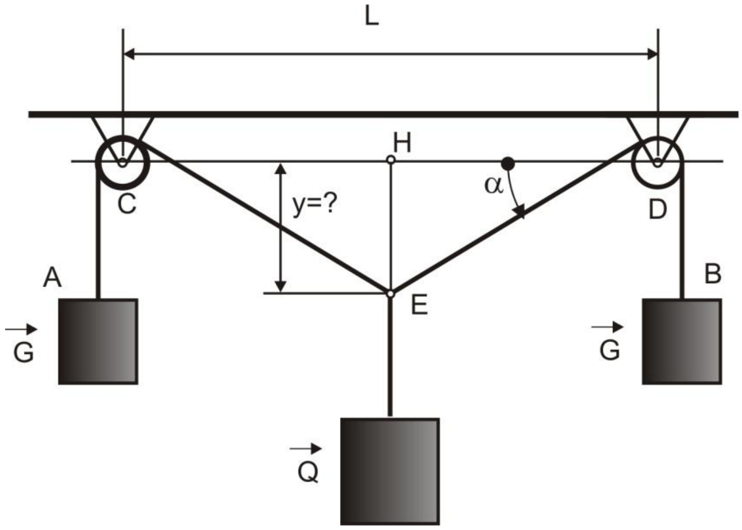
Rešenje je

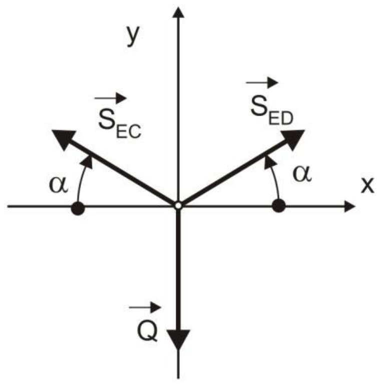
$F_{AB} = 0$

$F_{AC} = \sqrt{3}G$

Primer 1.9

Preko dva beskrajno mala kotura C i D, učvršćena na istoj horizontali , prebačeno je gipko nerastegljivo uže ACEDB. Rastojanje CD =L. Za krajeve A i B užeta okačeni su tegovi jednakih težina G, a u tački E, na sredini dužine užeta, okačen je teg težine Q. Za položaj ravnoteže odrediti rastojanje y od tačke E do horizontale CD.





Po[to je uže elastižno i nerastegljivo, a trenje i dimenzije koturova C i D zanemarljive sile u užadima S_{ED} i S_{EC} su jednake i jednake težini G. Pošto je postakom definisano da je tačka E na sredini između D i C to su i uglovi užeta sa horizontalom u tačkama C i D α jednaki.

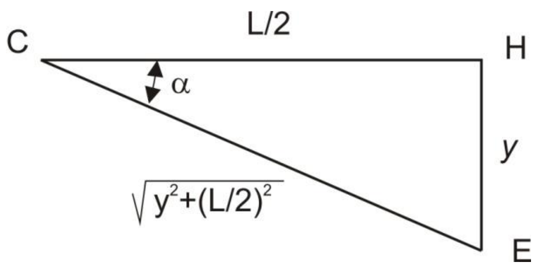
$\sum X_i = S_{ED}\cos\alpha - S_{Ec}\cos\alpha = 0$

$\sum Y_i = S_{ED}\sin\alpha + S_{EC}\sin\alpha - Q = 0$

$$S_{EC} = S_{ED} = G$$

$2G\sin\alpha - Q = 0 \qquad \sin\alpha = \frac{Q}{2G}$

Iz trougla CEH



$$y = \left[\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2}\,\right]\sin\alpha = \left[\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2}\,\right]\frac{Q}{2G}$$

$$y^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2\frac{Q^2}{4G^2} + \frac{Q^2}{4G^2}y^2$$

$y^2 - \frac{Q^2}{4G^2}y^2 = \frac{L^2}{4}\frac{Q^2}{4G^2}$

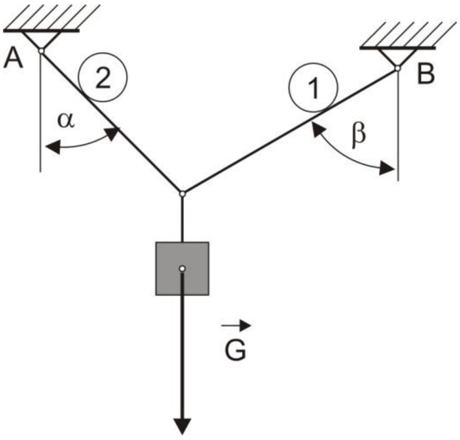
$\left(1 - \frac{Q^2}{4G^2}\right)y^2 = \frac{L^2}{4}\frac{Q^2}{4G^2}$

$\frac{4G^2 - Q^2}{4G^2}y^2 = \frac{L^2}{4}\frac{Q^2}{4G^2} \rightarrow \qquad 4(4G^2 - Q^2)y^2 = L^2Q^2 \rightarrow y = \sqrt{\frac{L^2Q^2}{4(4G^2 - Q^2)}}$

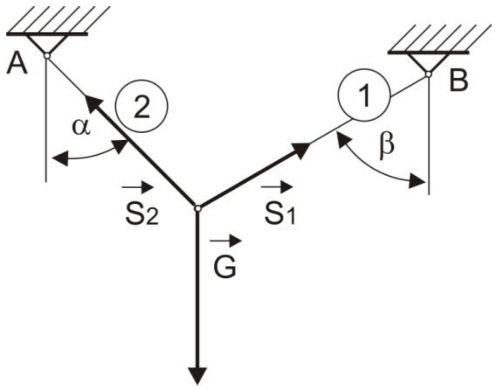
$y = \frac{L\,Q}{2\sqrt{4G^2 - Q^2}}$

Primer 1.10

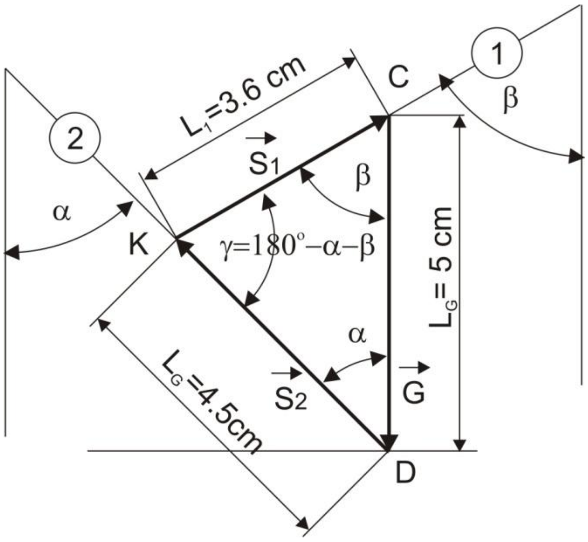
Telo težine $\vec{G}$ okačena je o dva nerastegljiva užeta. Ugao koji zaklapa uže okačeno u tački A sa vertikalom je α, a ugao užeta okačenog u tački B sa vertikalom je β. Odrediti grafički i analitički sile u užadima ako je G=50N, a uglovi $\alpha=45^o$ i $\beta=60^o$.



Veze zamenimo reakcijama veza u užadima, pravac užeta smer ka tački vešanja.



Grafičko rešavanje počinje izborom razmere za silu



$U_F = \frac{10N}{1cm}$

ucrtati težinu u duž dužine 5 cm koliko je 50 N u izabranoj razmeri.
U početnu tačku preneti pravac užeta B, a u krajnu tačku pravac užeta A
Presečna tačka definiše veličine sila u užadima.
Izmeriti dužine i pomnožiti sa razmerom i dobiće se vrednosti sila:
Za silu u užetu1 izmerena dužina je 3.6 cm, a u užetu 2 izmerena dužina je 4.5 cm, pa su grafički dobijene sile

$S_1 = L_1 \cdot U_F = 3.6\ cm \cdot \frac{10N}{1cm} = 3.6N$

$S_2 = L_2 \cdot U_F = 4.5\ cm \cdot \frac{10N}{1cm} = 4.5N$

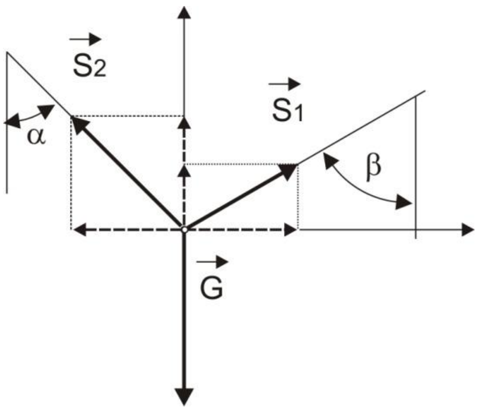
Analitičko rešenje:

Aanalizom trougla sila i primenom sinusne teoreme:

$$\frac{S_1}{sin\alpha} = \frac{S_2}{sin\beta} = \frac{G}{sin\gamma}$$

$$\frac{S_1}{sin\,45°} = \frac{S_2}{sin\,60°} = \frac{G}{sin\,75°}$$

$$\frac{S_1}{0.707} = \frac{S_2}{0.866} = \frac{G}{0.966} \rightarrow S_1 = \frac{50\cdot 0.707}{0.966} = 36.59N \rightarrow S_2 = \frac{50\cdot 0.866}{0.966} = 44.82N$$



Drugi način analitičkog rešavanja:

$X_1 = S_1 sin\beta; \quad Y_1 = S_1 cos\beta;$

$X_2 = S_2 sin\alpha; \quad Y_2 = S_2 cos\alpha;$

Mogu se i odmah zameniti brojne vrednosti:

$X_1 = S_1 sin60° = 0.866 \cdot S_1;$

$Y_1 = S_1 cos60° = 0.5 S_1;$

$X_2 = S_2 sin45° = 0.707 \cdot S_2;$

$Y_2 = S_2 cos45° = 0.707 S_2;$

1. $\sum X_i = 0 = X_1 + X_2 = S_1 sin\beta - S_2 sin\alpha = 0$
2. $\sum Y_i = 0 = Y_1 + Y_2 - G = S_1 cos\beta + S_2 cos\alpha - G = 0$

Iz jednačine 1 izrazimo jednu silu u užetu pa zamenimo u drugu jednačinu

1. $\rightarrow S_1 = \frac{S_2 sin\alpha}{sin\beta}$
2. $\frac{S_2 sin\alpha}{sin\beta} cos\beta + S_2 cos\alpha - G = 0$

$$s_2 = G \frac{sin\beta}{sin\alpha cos\beta \; + cos\alpha sin\beta} = \frac{50 \cdot sin\,60°}{sin\,45° cos\,60° + cos\,45° sin\,60°} = \frac{50 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}} = 0.897 \cdot 50 = 44.85N$$

$$S_1 = \frac{0.707}{0.866} 44.85 = 36.61N$$

Mogu se i odmah zameniti brojne vrednosti u izrazima:

1. $\sum X_i = 0 = X_1 + X_2 = 0.866 S_1 - 0.707 S_2 = 0 \;\rightarrow S_1 = \frac{0.707}{0.866} S_2 = 0.816 \cdot S_2$
2. $\sum Y_i = 0 = Y_1 + Y_2 - G = 0.5 S_1 + 0.707 S_2 - G = 0$

Zamenom u drugu jednačinu dobija se

$$(0.5 \cdot 0.816 + 0.707) \cdot S_2 - G = 0 \rightarrow S_2 = 0.897G = 0.897 \cdot 50 = 44.85N$$

$$S_1 = 0.816 \cdot 44.85 = 36.61N$$