# *PROIZVOLJAN RAVAN SISTEM SILA*

Jedan od zadataka statike je svođenje sistema sila i spregova na jednostavniji oblik određivanjem glavnog vektora sila (rezultantu sistema sila) i određivanjem glavnog momenta (rezultujućeg momenta sila i spregova).

Kod proizvoljnog ravnog sistema sila i momenata

$F_R = \sum_{i=1}^{n} F_i$ i $\mathfrak{Mo} = \sum_{i=1}^{n} M_i$

$$X_R = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{i} \quad Y_R = \sum_{i=1}^{n} F_i$$

Uslovi ravnoteže proizvoljnog ravnog sistema sila da su glavni vektor i glavni moment jednaki nuli

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0$$

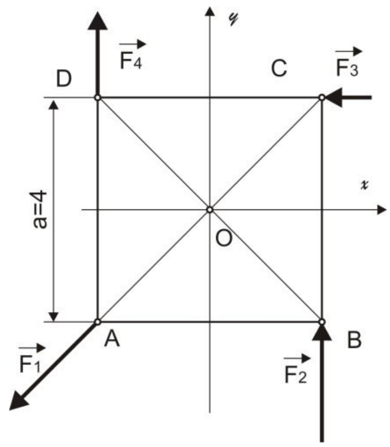
$$\sum_{i=1}^{n} M_O^{\vec{F}} = 0$$

**Teorema o paralelnom prenošenju sila**

*Dejstvo sile F na kruto telo se ne menja ako je prenesemo paralelno samoj sebi u bilo koju drugu tačku tela i pri tom pridodamo spreg sila čiji je moment jednak momentu sile koju paralelno prenosimo u odnosu na tačku u koju se sila prenosi.*

Teorema se može dokazati primenom **drugog aksioma** da se telu u ravnoteži može pridodati ili oduzeti uravnoteženi sistem sila. Dodaje se paralelna sila istog intenziteta i smera u tački u koju želimo da prenesemo silu i oduzima u toj tački ista sila suprotnog smera.

### *Primer 2.1 (Mehanika – statika L. Rusov)*

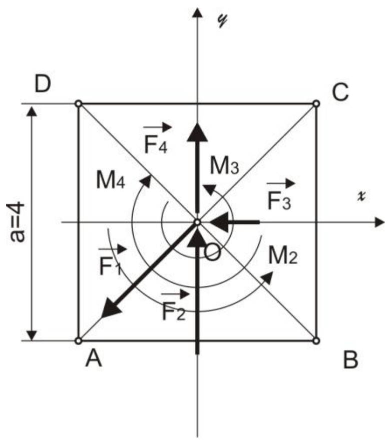



Na kvadratnu ploču ABCD, stranice a=4 m, deluje ravan sistem sila, kao na slici.

$F_1 = 3\sqrt{2}$ daN, $F_2 = 4$ daN, $F_3 = 1$ daN, $F_4 = 3$ daN

Odrediti glavni vektor $\overrightarrow{F_R}$ i glavni moment za redukcionu tačku O, koja se poklapa sa centrom kvadratne ploče.

Prenošenjem sila u tačku O moramo pridodat i momente nastale kao posledica pomeranja




$M_1 = 0$;

$M_2 = F_2 \times a/2 = 4 \times 2 = 8$;

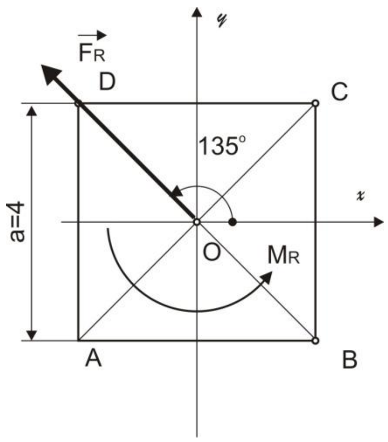
$M_3 = F_3 \times a/2 = 1 \times 2 = 2$

$M_4 = -F_4 \times a/2 = -3 \times 2 = -6$

$$F_R = \sqrt{X_R^2 + Y_R^2}$$

$$M_R = \sum M_i = M_2 + M_3 + M_4 = 8 + 2 - 6 = 4daNm$$

$$X_R = \sum X_i = -F_1\frac{\sqrt{2}}{2} - F_3 = -3\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = -4daN$$



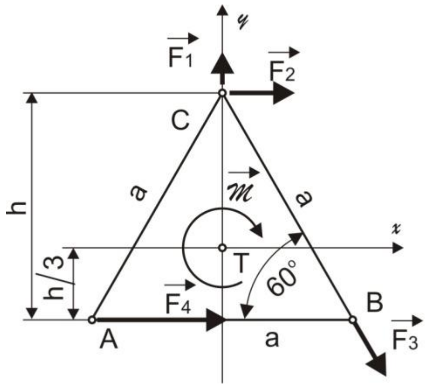

$$Y_R = \sum Y_i = -F_1\frac{\sqrt{2}}{2} + F_2 + F_4 = -3\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + 4 + 3 = 4daN$$

$$F_R = \sqrt{X_R^2 + Y_R^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}\,daN$$

$$tg\alpha = \frac{Y_R}{X_R} = \frac{4}{-4} = -1 \qquad \alpha = 135°$$

### *Primer 2.2*

Dati sistem sila redukovati u težište jednakostraničnog trougla i odrediti glavni vektor i glavni moment za redukcionu tačku T.



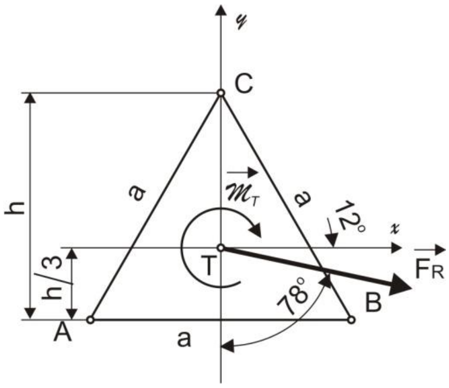

$F_1$=10 *daN*

$F_2$=20 *daN*

$F_3$=30 *daN*

$F_4$=40 *daN*

$\mathcal{M}$=8 *daNm*




$\overrightarrow{F_1}$ = $(X_1,Y_1)=(0,F_1)=(0,10)$; $M_T^{F_1} = 0$

$\overrightarrow{F_2}$ = $(X_2,Y_2)=(F_2,0)=(20,0)$; $M_T^{F_2} = F_2\frac{2h}{3} = F_2\frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = F_2\frac{a\sqrt{3}}{3}$

$\overrightarrow{F_3}$ = $(X_3,Y_3)=(F_3\cos 60^\circ, -F_3\sin 60^\circ)=\left(30\frac{1}{2}, -30\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $M_T^{F_3} = F_3\frac{h}{3} = F_3\frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = F_3\frac{a\sqrt{3}}{6}$

$\overrightarrow{F_4}$ = $(X_4,Y_4)=(F_4,0)$; $M_T^{F_4} = F_4\frac{h}{3} = F_4\frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = F_4\frac{a\sqrt{3}}{6}$

$$X_R = \sum X_i = F_2 + F_3\cos 60^\circ + F_4 = 20 + 15 + 40 = 75\ daN$$

$$Y_R = \sum Y_i = F_1 - F_3\cos 60^\circ = 10 - 30\frac{\sqrt{3}}{2} = -15.98\ daN$$

$$F_R = \sqrt{X_R^2 + Y_R^2} = \sqrt{75^2 + 15.98^2} = 76.68 daN$$

$$\cos\alpha = \frac{X_R}{F_R} = \frac{75}{76.68} = -0.97809 \rightarrow \alpha \approx 12^\circ$$

$$\cos\beta = \frac{Y_R}{F_R} = \frac{-15.98}{76.68} = -0.208398 \rightarrow \beta \approx 78^\circ$$

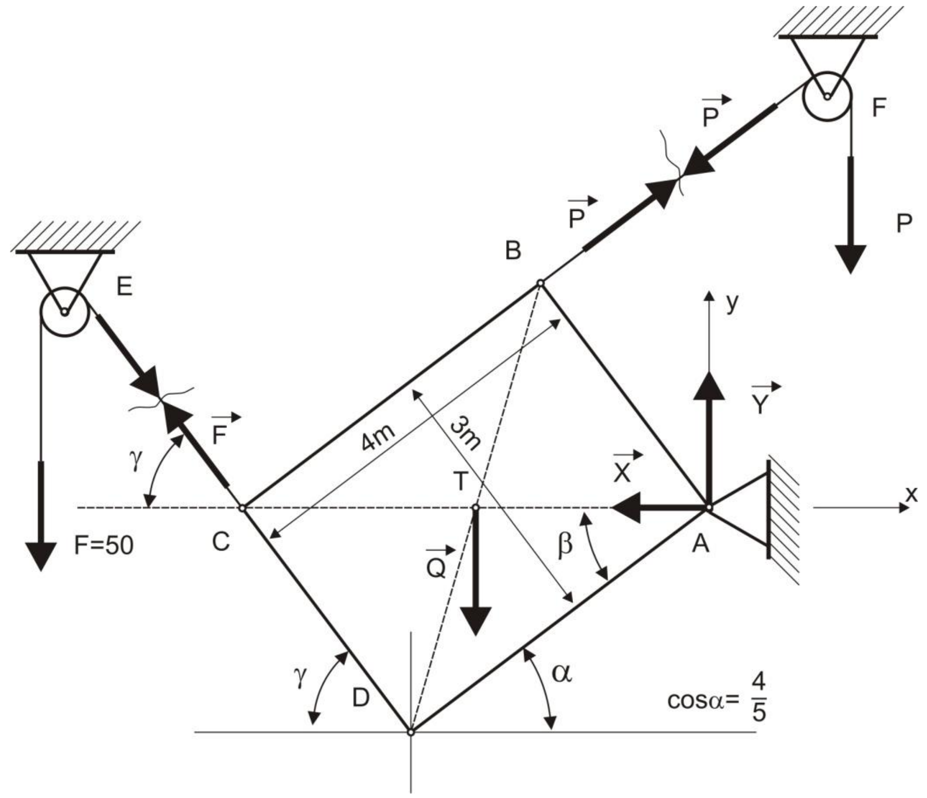
$$M_R = \sum M_T^{F_i} + \sum M_i = 0 + M_T^{F_2} + M_T^{F_3} + M_T^{F_4} + M = 0 - F_2\frac{a\sqrt{3}}{3} - F_3\frac{a\sqrt{3}}{6} + F_4\frac{a\sqrt{3}}{6} - M =$$

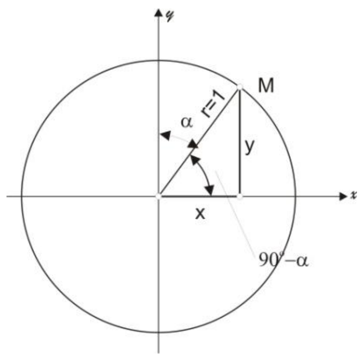
$$M_R = 0 - 20\frac{1\sqrt{3}}{3} - 30\frac{1\sqrt{3}}{6} + 40\frac{1\sqrt{3}}{6} - 8 = -16{,}66\ daNm$$

### *Primer 2.3 (M.1.87)*

Homogena pravougaona ploča ABCD, težine Q, može se obrtati u vertikalnoj ravni oko nepomičnog zgloba A. Ploča se održava u datom ravnotežnom položaju pomoću užadi koja su prebačena preko glatkih nepomičnih koturova E i F i zategnuti silama u pravcu stranica ploče. Dijagonala ploče AC je horizontalna.

Odrediti intezitet sile P i komponente otpora zgloba A, kada je Q=200 daN, a levo uže zategnuto silom od 50 daN, ako je $\cos\alpha = \frac{4}{5}$.




Treba uočiti da su uglovi α i β jednaki kao uglovi sa paralelnim kracima

$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{16+9} = 5m$

$\overline{AT} = \frac{1}{2}\overline{AC} = 2{,}5m$

$cos\alpha = \frac{4}{5}$ Cosγ=cos(180-90-α)=cos(90-a)=sinα

$sin\alpha = \sqrt{1-cos^2\alpha} = \sqrt{\frac{25-16}{25}} = \frac{3}{5}$ sinγ=sin(180-90-α)=sin(90-a)=cosα

$\sum X_i = -Fcos\gamma + Pcos\alpha - X = 0 \ \rightarrow X = Pcos\alpha - Fsin\alpha$

$\sum Y_i = Fsin\gamma + Psin\alpha - Q + Y = 0 \ \rightarrow Y = Q - Psin\alpha - Fcos\alpha$

$\sum M_A = F\overline{AD} + P\overline{AB} - Q\overline{AT} = 0$

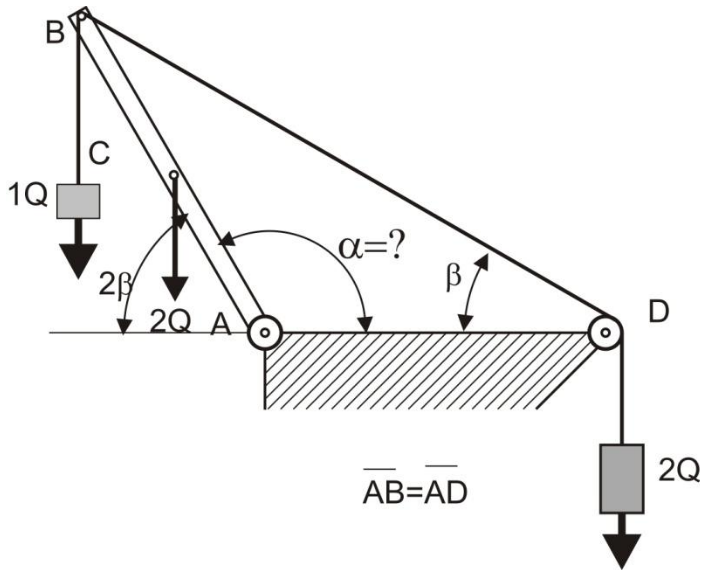
$\sum M_A = 4F + 3P3 - 2{,}5Q = 0 \rightarrow P = \frac{2{,}5Q-4F}{3} \ = \frac{2{,}5 \cdot 200 - 4 \cdot 50}{3} = 100daN$

$Y = Q - Psin\alpha - Fcos\alpha = 200 - \frac{3}{5}\cdot 100 - \frac{4}{5}\cdot 50 = 100daN$

$X = Pcos\alpha - Fsin\alpha = \frac{4}{5} \cdot 100 - \frac{3}{5} \cdot 50 = 50\ daN$

### *Primer 2.4 (M.1.88)*

O štap AB koji se može obrtati oko zgloba A, obešen je u tački B, pomoću konca teg težine 1daN. Za kraj B štapa AB vezan je drugi konac koji je prebačen preko nepokretnog koturа D i zategnut tegom 2daN. Dužina AD = AB. Težina štapa jednaka je 2daN.




1. Odrediti veličinu ugla DAB=$\alpha$ pri kojem će štap AB stajati u rabnoteži.
2. Ako je ugao $\beta$=30° odrediti reakcije u zglobu A

Rešenje:

Kako su AB=AD onda su i uglovi jednaki i iznose

2$\beta$=180-$\alpha$

Štab AB sa horizontalom zaklapa takođe ugao od 2$\beta$=180-$\alpha$

Označiti jednaka rastojanja AB=AD=L i izračunati ugao $\beta$.

Treba znati adicionu formulu za kosinus dvostrukog ugla

$cos2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha$ ,

$sin^2\alpha + cos^2 = 1$

rešenja kvadratne jednačine $ax^2 + bx + c = 0 \ \rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

1. $\sum M_A = 2QLsin\beta - 2Q\frac{L}{2}cos2\beta - QLcos2\beta = 0$

$sin\beta - cos2\beta = 0$ zamennom $sos2\beta = cos^2\beta - sin^2\beta$ dobija se

$sin\beta - cos^2\beta + sin^2\beta\ = 0$ zamenom $cos^2\beta = 1 - sin^2\beta$ dobija se

$sin\beta - 1 + sin^2\beta + sin^2\beta\ = 0$ odnosno $2sin^2\beta + sin\beta - 1 = 0$ rešenja ove jednačine su

$sin\beta = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4 \cdot 2(-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm 3}{4}$ rešenja su: $sin\beta = \frac{1}{2}$ odnosno $\beta$=30°

I drugo rešenje koje je ne prihvatljivo $sin\beta = -1$ odnosno $\beta$=270°

2. $\sum X_i = -X_A + 2Qcos\beta = 0 \rightarrow X_A = 2Qcos30° = 2 \cdot 1\frac{\sqrt{3}}{2} = 1\sqrt{3} = 1.732daN$
3. $\sum Y_i = Y_A - 2Qsin\beta - Q - 2Q = 0 \rightarrow Y_A = 2Qsin30° + 3Q = 2 \cdot 1\frac{1}{2} + 3 \cdot 1 = 4\ daN$