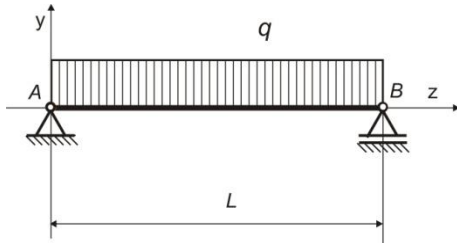


**Primer 3.1**

Za prostu gredu prikazanu na slici odrediti otpore oslonaca i nacrtati osnovne statičke dijagrame.  $q = 0.8 \frac{kN}{m}$ ,  $L=4m$ .



$$\begin{aligned} 1. \quad \sum Z_i &= Z_A = 0 \\ 2. \quad \sum Y_i &= Y_A - L \cdot q + F_B = 0 \\ 3. \quad \sum M_A &= L \cdot q \cdot \frac{L}{2} - L \cdot F_B = 0 \end{aligned}$$

$$Z_A = 0 \text{ otuda je } Y_A = F_A$$

$$\text{a iz 3)} \quad F_B = q \cdot \frac{L}{2} = 0.8 \frac{4}{2} = 1.6 \text{ kN}$$

$$\text{a iz 2)} \quad F_A = L \cdot q - F_B = L \cdot q - q \cdot \frac{L}{2} = q \cdot \frac{L}{2} = 0.8 \frac{4}{2} = 1.6 \text{ kN}$$

Izvršiti proveru izračunatih otpora oslonaca računanjem momentne jednačine za oslonac B.

$$\sum M_B = L \cdot q \cdot \frac{L}{2} - L \cdot F_A = 4 \cdot 0.8 \cdot \frac{4}{2} - 4 \cdot 1.6 = 0$$

Pošto nema diskontinualnih promena na celom rasponu grede to je ceo raspon L jedno polje.

1. Promena aksijalne sile i dijagram aksijalne sile – aksijalna sila jednaka 0 pa ga nema
2. Promena transverzalne sile i dijagram transverzalne sile

$$F_T = F_A - q \cdot z = q \cdot \frac{L}{2} - q \cdot z = q \left( \frac{L}{2} - z \right)$$

poznato je da je  $F_T = \frac{dM_f(z)}{dz}$  pa kada je prvi izvod funkcije 0 funkcija ima ekstremnu vrednost za tu vrednost promenljive. Određuje se  $z_0$  za koje je  $F_T=0$ .

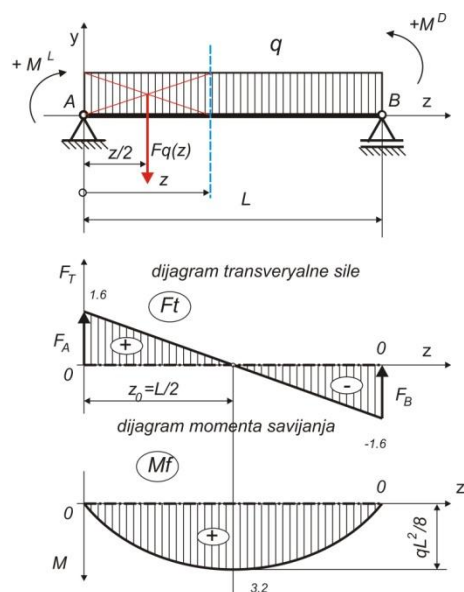
$$F_T = F_A - q \cdot z_0 = q \left( \frac{L}{2} - z_0 \right) = 0 \rightarrow z_0 = \frac{L}{2}$$

3. Promena momenta savijanja i dijagram momenta savijanja

$$M_f = F_A \cdot z - q \cdot z \cdot \frac{z}{2} = q \cdot \left( z - \frac{z^2}{2} \right)$$

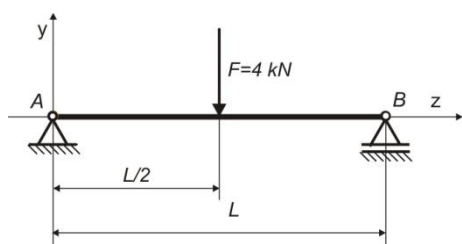
Ekstremna vrednost je za sračunato  $z_0$

$$M_{f(z_0)} = q \cdot \left( z_0 - \frac{z_0^2}{2} \right) = q \cdot \left( \frac{L}{2} - \frac{\left(\frac{L}{2}\right)^2}{2} \right) = q \cdot \frac{L^2}{8} = 0.8 \cdot \frac{4^2}{8} = 1.6 \text{ kNm}$$



### Primer 3.2

Za prostu gredu prikazanu na slici odrediti otpore oslonaca i nacrtati osnovne statičke dijagrame, ako je  $F=3.2$  kN, a raspon grede  $L=4$  m.



1.  $\sum Z_i = Z_A = 0$
2.  $\sum Y_i = Y_A - F + F_B = 0$
3.  $\sum M_A = F \cdot \frac{L}{2} - L \cdot F_B = 0$

$$Z_A = 0 \text{ otuda je } Y_A = F_A$$

$$\text{a iz 3) } F_B = F \cdot \frac{L}{2 \cdot L} = \frac{F}{2} = \frac{3.2}{2} = 1.6 \text{ kN}$$

$$\text{a iz 2) } F_A = F - F_B = F - 2 = 1.6 \text{ kN}$$

Izvršiti proveru izračunatih otpora oslonaca računanjem momentne jednačine za oslonac B.

$$\sum M_B = F \cdot \frac{L}{2} - L \cdot F_A = 3.2 \cdot \frac{4}{2} - 4 \cdot 1.6 = 0$$

Pošto greda ima koncentrisanu silu, raspon grede deli se na dva polja polje I od oslonca A do sile, i polje II od sile do oslonca.

Polje I  $0 \leq z \leq \frac{L}{2}$

1. Promena aksijalne sile i dijagram aksijalne sile – aksijalna sila jednaka 0 pa ga nema
2. Promena transverzalne sile (sa leve strane) i dijagram transverzalne sile

$$F_T = F_A = 1.6 \text{ kN}$$

3. Promena momenta savijanja (sa leve strane) i dijagram momenta savijanja

$$M_f = F_A \cdot z = 1.6 \cdot z$$

vrednost su za  $z=0$   $M_f(z=0) = 0$

vrednost su za  $z=2$   $M_f(z=2) = 3.2$  kNm

Polje II  $\frac{L}{2} \leq z \leq L$

1. Promena aksijalne sile i dijagram aksijalne sile – aksijalna sila jednaka 0 pa ga nema
2. Promena transverzalne sile (sa leve strane) i dijagram transverzalne sile

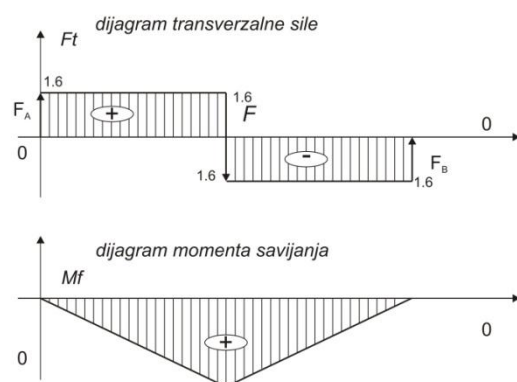
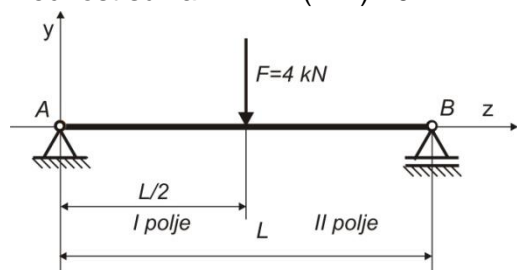
$$F_T = F_A - F = 1.6 - 3.2 = -1.6 \text{ kN}$$

3. Promena momenta savijanja (sa leve strane) i dijagram momenta savijanja

$$M_f = F_A \cdot z - F \left( z - \frac{L}{2} \right) = \frac{F}{2} \cdot z - F \cdot z + F \frac{L}{2} = \frac{F}{2} (L - z) = 1.6(L - z)$$

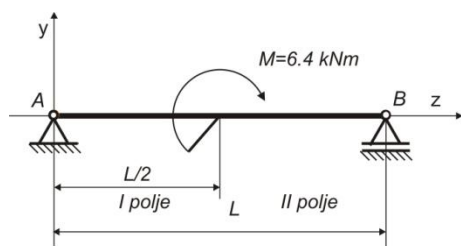
vrednost su za  $z=2$ :  $M_f(z=2) = 3.2 \text{ kNm}$

vrednost su za  $z=4$ :  $M_f(z=4) = 0$



### Primer 3.3

Za prostu gredu prikazanu na slici odrediti otpore oslonaca i nacrtati osnovne statičke dijagrame, ako je  $M=6.4 \text{ kNm}$ , a raspon grede  $L=4 \text{ m}$ .



1.  $\sum Z_i = Z_A = 0$
2.  $\sum Y_i = Y_A + F_B = 0$
3.  $\sum M_A = M - L \cdot F_B = 0$

$$Z_A = 0 \text{ otuda je } Y_A = F_A$$

a iz 3)  $F_B = \frac{M}{L} = \frac{6.4}{4} = 1.6 \text{ kN}$

a iz 2)  $F_A = -F_B = -1.6 \text{ kN}$

Izvršiti proveru izračunatih otpora oslonaca računanjem momentne jednačine za oslonac B.

$$\sum M_B = M - L \cdot F_A = 6.4 - 4 \cdot 1.6 = 0$$

Pošto greda ima koncentrisanu moment, raspon grede deli se na dva polja polje I od oslonca A do momenta, i polje II od momenta do oslonca.

Polje I  $0 \leq z \leq \frac{L}{2}$

1. Promena aksijalne sile i dijagram aksijalne sile – aksijalna sila jednaka 0 pa ga nema
2. Promena transverzalne sile(sa leve strane) i dijagram transverzalne sile

$$F_T = -F_A = -1.6 \text{ kN}$$

3. Promena momenta savijanja(sa leve strane) i dijagram momenta savijanja

$$M_f = -F_A \cdot z = -1.6 \cdot z$$

vrednost su za  $z=0$   $M_f(z=0) = 0$

vrednost su za  $z=2$   $M_f(z=2) = 3.2 \text{ kNm}$

Polje II  $\frac{L}{2} \leq z \leq L$

1. Promena aksijalne sile i dijagram aksijalne sile – aksijalna sila jednaka 0 pa ga nema
2. Promena transverzalne sile(sa leve strane) i dijagram transverzalne sile

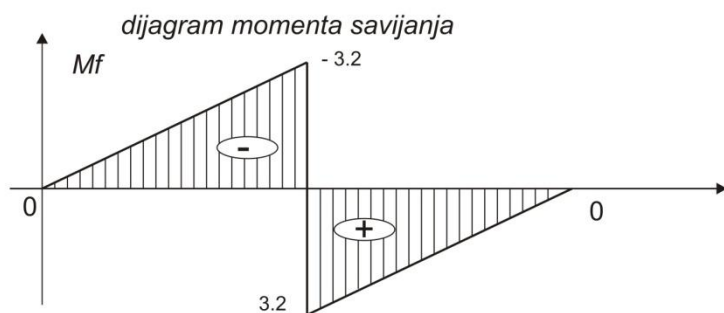
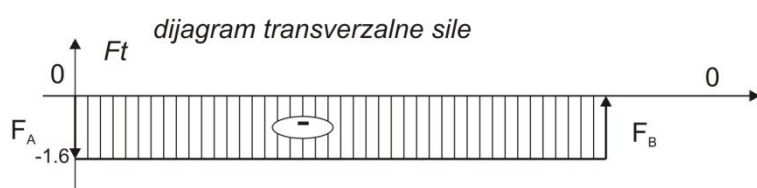
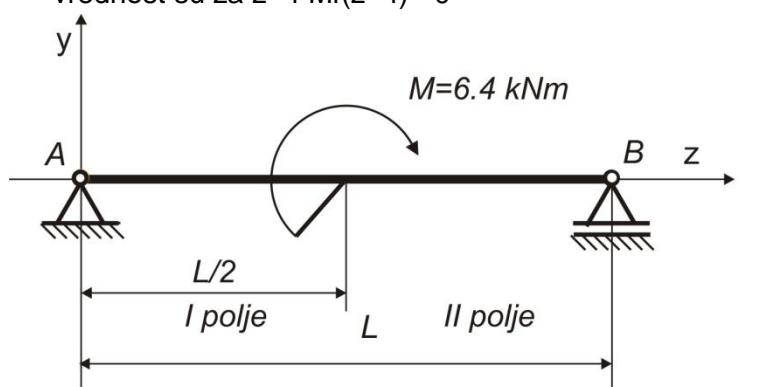
$$F_T = -F_A = -1.6 \text{ kN}$$

3. Promena momenta savijanja(sa leve strane) i dijagram momenta savijanja

$$M_f = -F_A \cdot z + M = -1.6 \cdot z + 6.4$$

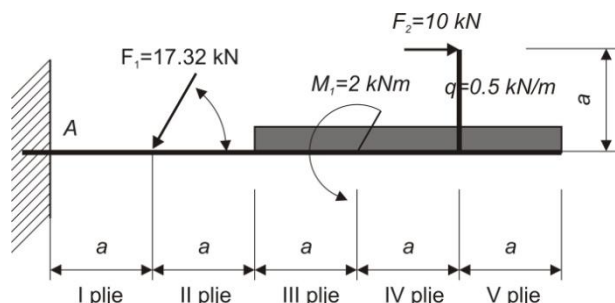
vrednost su za  $z=2$   $M_f(z=2) = 3.2 \text{ kNm}$

vrednost su za  $z=4$   $M_f(z=4) = 0$



**Primer 3.4**

Za konzolu prikazanu na slici odrediti otpore oslonaca i nacrtati osnovne statičke dijagrame. Poznata su opterećenja  $F_1 = 10\sqrt{3}$  kN,  $F_2 = 10$  kN,  $M_1 = 2$  kNm,  $q = 0.5 \frac{kN}{m}$ ,  $a=1$  m a ugao  $\alpha=60^\circ$ .



Da bi se rešila konzola treba paralelno premestiti silu  $F_2$  na pravac grede što uslovljava dodavanje momenta u tački u koju se sila premešta a jednakog proizvodu normalnog rastojanja i sile. U osloncu se zamenjuje dejstvo reakcijama oslonaca, A kosa sila u ravni odnosno dve komponente i moment uklještenja.

$$Z_1 = F_1 \cos \alpha = 10\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 8.666 \text{ kN}$$

$$Y_1 = F_1 \sin \alpha = 10\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 15 \text{ kN}$$

$$M_{F_2} = F_2 \cdot a = 10 \cdot 1 = 10 \text{ kNm}$$

$$F_q = q \cdot 3a = 0.5 \cdot 3 = 1.5 \text{ kN}$$

$$1. \sum Z_i = -Z_A + Z_1 - F_2 = 0$$

$$2. \sum Y_i = Y_A - Y_1 - F_q = 0$$

$$3. \sum M_A = M_A + Y_1 \cdot a - M_1 + q \cdot 3a \cdot 3.5a + F_2 a = 0$$

$$Z_A = Z_1 - F_2 = 8.666 - 10 = -1.339 \text{ kN}$$

$$Y_A = Y_1 + F_q = 15 + 1.5 = 16.5 \text{ kN}$$

$$M_A = -Y_1 \cdot a + M_1 - q \cdot 3a \cdot 3.5a - F_2 a$$

$$M_A = -15 \cdot 1 + 2 - 0.5 \cdot 3 \cdot 3.5 + 10 \cdot 1 = -28.25 \text{ kNm}$$

Provera otpora oslonaca

$$\sum M_B = M_A - Y_A \cdot 5a + Y_1 \cdot 4a + M_1 + q \cdot 3a \cdot 1.5a - F_2 a =$$

$$\sum M_B = +28.25 - 16.5 \cdot 5 + 15 \cdot 4 + 2 + 0.5 \cdot 3 \cdot 1.5 - 10 \cdot 1 = 0$$

Pošto konzola ima dva koncentrisan moment, moment kao posledicu paralelnog premeštanja sile, kontinualno opterećenje, dve koncentrisane sile, raspon grede deli se na četiri polja. Treba napomenuti da je predpostavljeni smer aksijalne sile suprotan od dobijenog.

Polje I  $0 \leq z \leq a$

1. Promena aksijalne sile i dijagram aksijalne sile

$$F_a = Z_A = 1.339 \text{ kN}$$

2. Promena transverzalne sile(sa leve strane) i dijagram transverzalne sile

$$F_T = Y_A = 16.5 \text{ kN}$$

3. Promena momenta savijanja(sa leve strane) i dijagram momenta savijanja

$$M_f = -M_A + Y_A \cdot z = -28.25 + 16.5 \cdot z$$

vrednost su za  $z=0$ :  $M_f(z=0) = -28.25 \text{ kNm}$

vrednost su za  $z=a=1$ :  $M_f(z=1) = -11.75 \text{ kNm}$

Polje II  $a \leq z \leq 2a$

1. Promena aksijalne sile i dijagram aksijalne sile

$$F_a = Z_A + Z_1 = 1.339 + 8.666 = 10 \text{ kN}$$

2. Promena transverzalne sile(sa leve strane) i dijagram transverzalne sile

$$F_T = Y_A - Y_1 = 16.5 - 15 = 1.5 \text{ kN}$$

vrednost su za  $z=a=1$ :  $F_T(z=1) = 1.5 \text{ kN}$

vrednost su za  $z=2a=2$ :  $F_T(z=2) = 1.5 \text{ kN}$

3. Promena momenta savijanja(sa leve strane) i dijagram momenta savijanja

$$M_f = -M_A + Y_A \cdot z - Y_1 \cdot (z - a) = -28.25 + 16.5 \cdot z - 15z + 15 = -13.25 + 1.5z$$

vrednost su za  $z=a=1$ :  $M_f(z=1) = -11.75 \text{ kNm}$

vrednost su za  $z=2a=2$ :  $M_f(z=2) = -10.25 \text{ kNm}$

Polje III  $2a \leq z \leq 3a$

1. Promena aksijalne sile i dijagram aksijalne sile

$$F_a = Z_A + Z_1 = 1.339 + 8.666 = 10 \text{ kN}$$

2. Promena transverzalne sile(sa leve strane) i dijagram transverzalne sile

$$F_T = Y_A - Y_1 - q(z - 2a) = 16.5 - 15 - 0.5z + 2 \cdot 0.5 = 2.5 - 0.5z$$

vrednost su za  $z=2a=2$ :  $F_T(z=2) = -1.5 \text{ kN}$

vrednost su za  $z=3a=3$ :  $F_T(z=3) = -1 \text{ kN}$

3. Promena momenta savijanja(sa leve strane) i dijagram momenta savijanja

$$M_f = -M_A + Y_A \cdot z - Y_1 \cdot (z - a) - \frac{1}{2}q(z - 2a)^2 =$$

$$= -28.25 + 16.5 \cdot z - 15(z - 1) - \frac{1}{2} \cdot 0.5(z - 2a)^2 = -14.25 + 2.5z - 0.25z^2$$

vrednost su za  $z=2a=2$ :  $M_f(z=2) = -10.25 \text{ kNm}$

vrednost su za  $z=3a=3$ :  $M_f(z=3) = 9 \text{ kNm}$

Polje IV  $3a \leq z \leq 4a$

1. Promena aksijalne sile i dijagram aksijalne sile

$$F_a = Z_A + Z_1 = 1.339 + 8.666 = 10 \text{ kN}$$

2. Promena transverzalne sile(sa leve strane) i dijagram transverzalne sile

$$F_T = Y_A - Y_1 - q(z - 2a) = 16.5 - 15 - 0.5z + 2 \cdot 0.5 = 2.5 - 0.5z$$

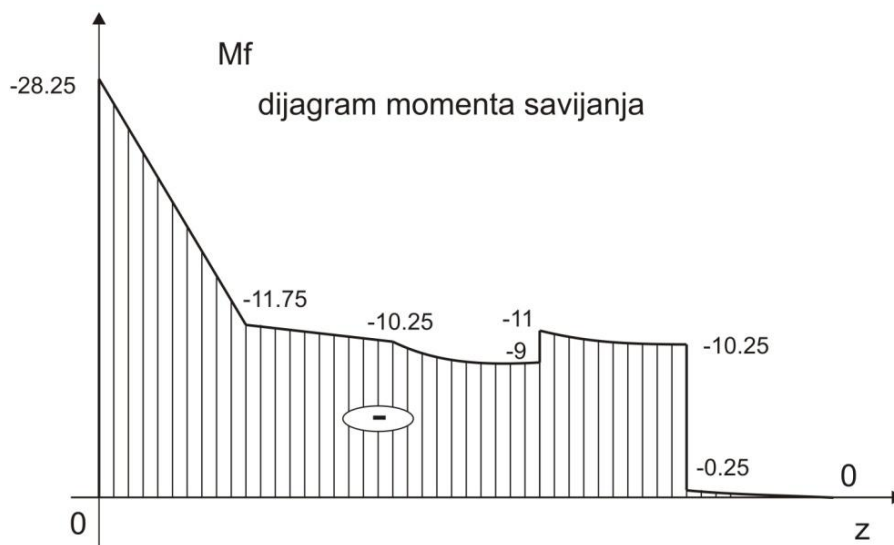
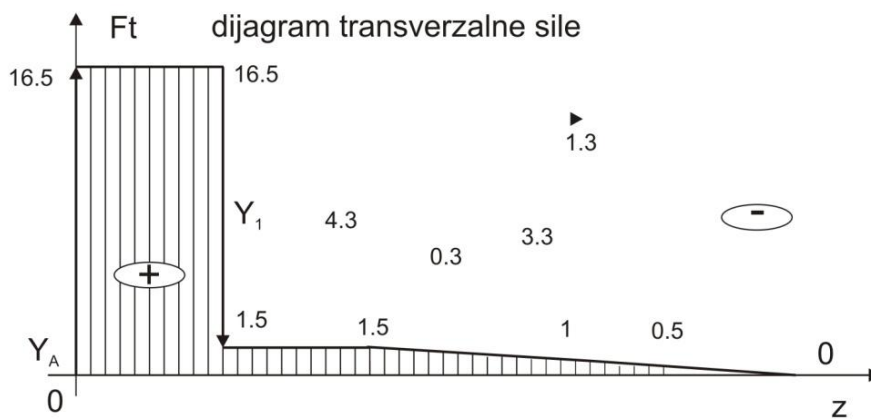
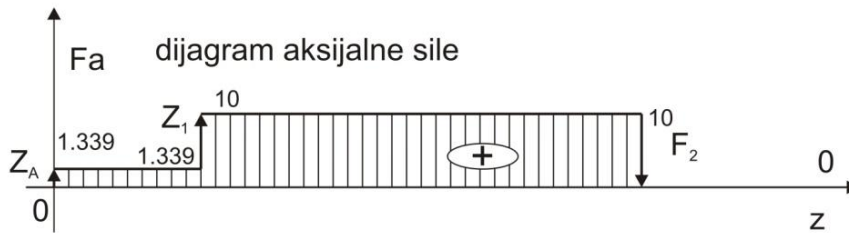
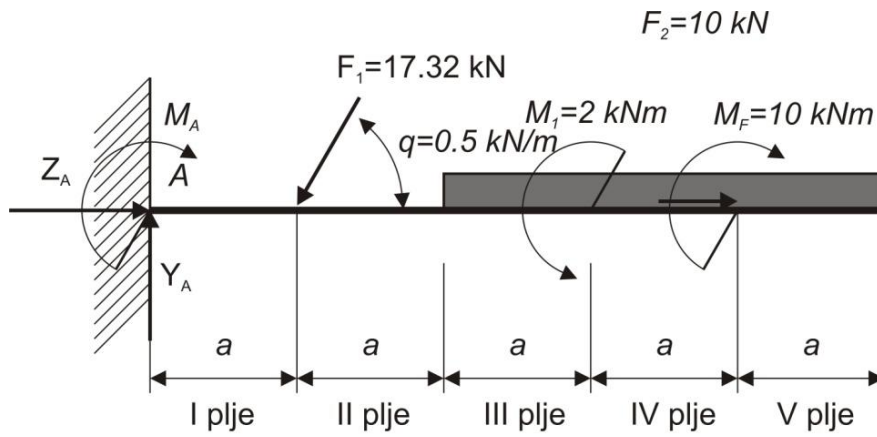
vrednost su za  $z=3a=3$ :  $F_T(z=3) = 1 \text{ kN}$

vrednost su za  $z=4a=4$ :  $F_T(z=4) = 0.5 \text{ kN}$

3. Promena momenta savijanja(sa leve strane) i dijagram momenta savijanja

$$M_f = -M_A + Y_A \cdot z - Y_1 \cdot (z - a) - \frac{1}{2}q(z - 2a)^2 - M_1 =$$

$$= -28.25 + 16.5 \cdot z - 15(z - 1) - \frac{1}{2} \cdot 0.5(z - 2a)^2 - 2 = -16.25 + 2.5z - 0.25z^2$$



vrednost su za  $z=3a=3$ :  $M_f(z=3) = -11$  kNm

vrednost su za  $z=4a=4$ :  $M_f(z=4) = -10.25$  kNm

Polje V  $4 \leq z \leq 5a$

1. Promena aksijalne sile i dijagram aksijalne sile

$$F_a = Z_A + Z_1 - F_1 = 1.339 + 8.666 - 10 = 0$$

2. Promena transverzalne sile(sa desne strane) i dijagram transverzalne sile

$$F_T = Y_A - Y_1 - q(z - 2a) = 16.5 - 15 - 0.5z + 2 \cdot 0.5 = 2.5 - 0.5z$$

vrednost su za  $z=4a=4$ :  $F_T(z=4) = 0.5$  kN

vrednost su za  $z=5a=5$ :  $F_T(z=5) = 0$  kN

3. Promena momenta savijanja(sa desne strane) i dijagram momenta savijanja

$$M_f = -\frac{1}{2}q(5a - z)^2 = -\frac{1}{2}0.5 \cdot 25a^2 + 2\frac{1}{2}0.5 \cdot 5az - \frac{1}{2}0.5z^2 = -0.25z^2 + 2.5z - 6.25$$

vrednost su za  $z=4a=4$ :  $M_f(z=4) = -0.25$  kNm

vrednost su za  $z=5a=5$ :  $M_f(z=5) = 0$