Opšti zakoni dinamike materijalne tačke

Zakon o promeni količine kretanja

Zakon o promeni momenta količine kretanja

Zakon o održanju momenta količine kretanja

Kinetička energija materijalne tačke

Zakon o promeni kinetičke energije

Zakon o održanju mehaničke energije

Opšti zakoni dinamike materijalne tačke

- Rešavanje problema dinamike rešavanjem diferencijalnih jednačina integracijom

Kod jednostavnih primera rešavanje zna da bude komplikovano,

- Rezultati nemaju matematički jednostavan oblik
- Da bi se jednostavnije rešavali tehnički problemi i određivale potrebne veličine u određenim vremenskim intervalima a da se problem ne izučava u celini izvedeni su opšti zakoni dinamike tačke
- Primenom ovih zakona izbegava se integrisanje diferencijalnih jednačina jer je to učinjeno pri njihovom izvođenju

Opšti zakoni dinamike materijalne tačke

- Opšte zakone treba smatrati kao teoreme izvedene iz Njutnovih zakona
- Opšti zakoni povezuju izvesne dinamičke veličine koje karakterišu kretanje (kinetička energija, moment količine kretanja), sa veličinama koje karakterišu dejstvo sila (rad sile, moment sile)

Opšti zakoni dinamike materijalne tačke

Ovi zakoni su:

- Zakon o promeni količine kretanja
- Zakon o promeni momenta količine kretanja
- Zakon o promeni kinetičke energije materijalne tačke

Količina kretanja

- Količina kretanja materijalne tačke je vektorska veličina koja predstavlja proizvod mase i brzine tačke

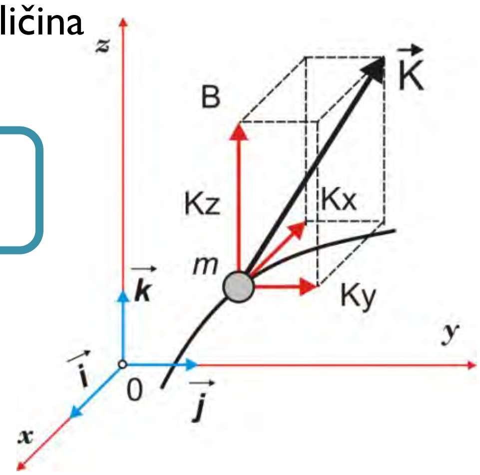
$$\boxed{\vec{K} = m \cdot \vec{V}}$$

- Vektor količine kretanja je vektor kolinearan sa vektorom brzine i istog smera

Količina kretanja

- Količina kretanja materijalne tačke je vektorska veličina

$$\boxed{\vec{K} = m \cdot \vec{V}}$$



Količina kretanja

$$\vec{K} = m \cdot \vec{V}$$

- Vektor količine kretanja je vektor koji se u Dekartovom koordinatnom sistemu može projektovati na ose

$$\vec{K} = K_x\vec{i} + K_y\vec{j} + K_z\vec{k}$$

$$K_x = m\,V_x = m\,\dot{x}$$
$$K_y = m\,V_y = m\,\dot{y}$$
$$K_z = m\,V_z = m\,\dot{z}$$

Dimenzija Ns
Njutn sekund

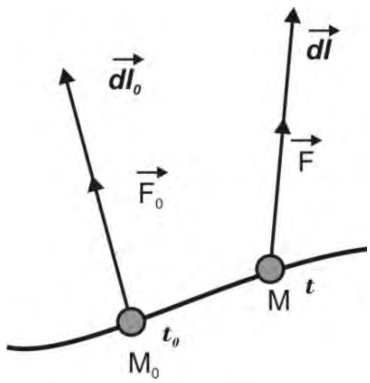
Elementni impuls sile

- Elementni impuls sile je vektorska veličina koja je proizvod vektora sile i elementarnog vremenskog intervala

$$d\vec{I} = \vec{F}\,dt$$

- Vektor elementnog impulsa sile je vektor kolinearan sa vektorom sile i istog je smera kao i sila

Elementni impuls sile



- Elementni impuls sile je vektorska veličina koja je proizvod vektora sile i elementarnog vremenskog intervala

$$\boxed{d\vec{I} = \vec{F}\,dt}$$

- Vektor elementnog impulsa sile je vektor kolinearan sa vektorom sile i istog je smera kao i sila

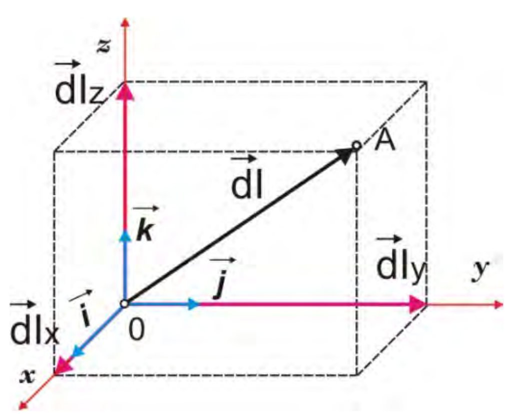
Elementni impuls sile

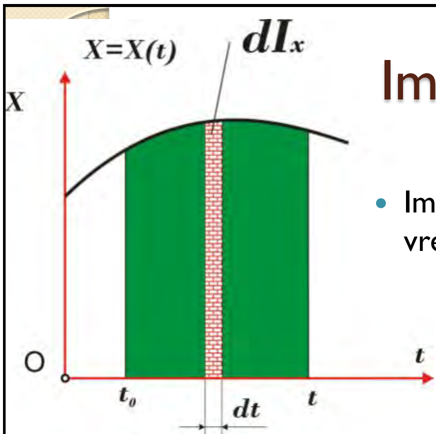
$$\boxed{d\vec{I} = \vec{F}\,dt}$$

- Elementni impuls sile je vektorska veličina koja se projektuje na ose koordinatnog sistema

$$d\vec{I} = \vec{F}\,dt$$

$$d\,I_x = X\,dt$$
$$d\,I_y = Y\,dt$$
$$d\,I_z = Z\,dt$$





Impuls sile

- Impuls sile je definisan u određenom vremenskom intervalu t_0, t

$$\boxed{\vec{I} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}\ dt}$$

$$I_x = \int_{t_0}^{t} X\ dt \qquad I_y = \int_{t_0}^{t} Y\ dt \qquad I_z = \int_{t_0}^{t} Z\ dt$$

- Vektor impulsa sile zavisi od sile i vremenskog intervala

Dimenzija Ns
Njutn sekund

Impuls sile

- Ako je pravac sile konstantan u nekom vremenskom intervalu, onda je vektor impulsa sile kolinearan sa silom
- Ako je sila konstantna u nekom vremenskom intervalu onda se impuls sile dobija množenjem sile i tog vremenskog intervala

$$\vec{I} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}\ dt = \vec{F} \int_{t_0}^{t} dt = \vec{F}\ t$$

- Impuls sile se može izračunati samo ako je poznata zavisnost sile od vremena

$$\vec{F} = \vec{F}\ (t);\ \ X = X(t);\ \ Y = Y(t);\ \ Z = Z(t)$$

Zakon o promeni količine kretanja u diferencijalnom obliku

- Prema II Njutnovom zakonu diferencijalni oblik zakona o promeni količine kretanja

$$m\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}$$

$$\frac{d(m\vec{V})}{dt} = \vec{F}$$

- Ako je masa konstantna
- Odnosno kako je količina kretanja $\vec{K} = m \cdot \vec{V}$

$$\boxed{\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F}}$$

Zakon o promeni količine kretanja u integralnom obliku

- Često se pri rešavanju zadataka traži količina kretanja (određena je i brzina) na kraju nekog vremenskog intervala

$$d\vec{K} = \sum F_i dt = \sum d\vec{I_i}$$

- Integraljenjem se dobija

$$\int_0^t d\vec{K} = \sum \int_0^t F_i dt = \sum \int_0^t d\vec{I_i}$$

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{K}} - \vec{\boldsymbol{K}}_0 = \sum \vec{\boldsymbol{I_i}}}$$

Zakon o promeni količine kretanja

$$\boxed{\vec{K} - \vec{K}_0 = \sum \vec{I_i}}$$

Promena količine kretanja materijalne tačke u nekom vremenskom intervalu jednaka je vektorskom zbiru impulsa svih sila, koje dejstvuju na tačku, računatih u tom istom vremenskom intervalu

Zakon o promeni količine kretanja

$$\boxed{\vec{K} - \vec{K}_0 = \sum \vec{I_i}}$$

Vektorska jednačina napisana u skalarnom obliku

$$K_x - K_{x0} = \sum I_{ix} \qquad m\,\dot{x} - m\,\dot{x}_0 = \sum I_{ix}$$

$$K_y - K_{y0} = \sum I_{iy} \qquad m\,\dot{y} - m\,\dot{y}_0 = \sum I_{iy}$$

$$K_z - K_{z0} = \sum I_{iz} \qquad m\,\dot{z} - m\,\dot{z}_0 = \sum I_{iz}$$

Gde je I_{ix} projekcija impulsa i-te sile na osu x ....

$$I_{ix} = \int_{t_0}^{t} X_i \; dt \qquad I_{iy} = \int_{t_0}^{t} Y_i \; dt \qquad I_{iz} = \int_{t_0}^{t} Z_i \; dt$$

Zakon o održanju količine kretanja materijalne tačke

$$\sum \vec{F}_i = 0 \rightarrow \frac{d\vec{K}}{dt} = 0$$

Ako je u nekom vremenskom intervalu vektorski zbir impulsa svih sila jednak nuli, onda je količina kretanja tačke na kraju jednaka količini kretanja na početku tog intervala

$$\sum \vec{I}_i = 0 \rightarrow \vec{K} = \vec{K}_0$$

(u pojedinim trenucima unutar vremenskog intervala rezultanta može biti i različita od nule)

Primena zakona o održanju količine kretanja materijalne tačke

- Zakon o promeni količine kretanja pogodan je je za primenu u slučajevima kada se mogu izračunati impulsi sile, a to su slučajevi kada je sila konstantna ili poznata funkcija vremena

Moment količine kretanja

- Moment vektora količine kretanja može biti
  - Moment vektora količine kretanja za tačku
  - Moment vektora količine kretanja za osu

- Moment količine kretanja za tačku obeležava se $\vec{L}_A$ u indeksu tačka za koju je određen moment količine kretanja
- Moment količine kretanja za osu obeležava se se $\vec{L}_{Ax}$ u indeksu osa za koju je određen moment količine kretanja

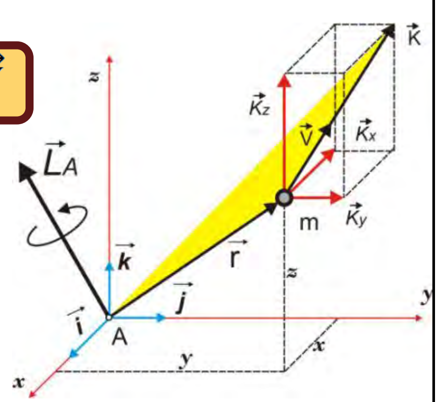
Moment količine kretanja

- Moment količine kretanja za tačku je vektorski proizvod vektora položaja i vektora količine kretanja

$$\boxed{\vec{L}_A = \vec{r} \times \vec{K} = \vec{r} \times m\vec{V}}$$

$$\vec{L}_A = \vec{r} \times m\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ m\dot{x} & m\dot{y} & m\dot{z} \end{vmatrix}$$

$$L_{Ax} = m(y\dot{z} - z\dot{y}) = L_x$$
$$L_{Ay} = m(z\dot{x} - x\dot{z}) = L_y$$
$$L_{Az} = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = L_z$$



Moment količine kretanja

- Moment količine kretanja tačke mase m za tačku A, L_A je vektor upravan na ravan u kojoj leži brzina i vektor položaja tačke
- Razvijanjem determinante dobijaju se projekcije vektora količine kretanja za tačku za ose
- Projekcije vektora momenta količine kretanja za tačku na ose su u isto vreme i momenti količine kretanja za ose (projekcija momenta sile na osu jednaka je momentu sile za tu osu)

Promena momenta količine kretanja

- Polazeći od Njutnovog zakona

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_i \qquad m\frac{d\vec{V}}{dt} = \sum \vec{F}_i$$

- Ako i jednu i drugu stranu izraza pomnožimo vektorski sa vektorom položaja

$$\vec{r} \times m\frac{d\vec{V}}{dt} = \sum \vec{r} \times \vec{F}_i$$

- Izvod momenta količine kretanja po vremenu

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times m\vec{V}\right) = \boxed{\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{V}} + \vec{r} \times m\frac{d\vec{V}}{dt}$$

- Izvod vektora položaja po vremenu je po definiciji brzina a vektorski proizvod dva kolinearna vektora je nula

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{r} \times m\frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \sum \vec{r} \times \vec{F}_i = \sum \vec{M}_A^{F_i}$$

Zakon o promeni momenta količine kretanja za tačku

- Dobijena zavisnost predstavlja zakon promene momenta količine kretanja za tačku A u vektorskom obliku

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \sum \vec{M}_A^{\vec{F}_i}$$

- Izvod momenta količine kretanja za neku tačku A jednak je vektorskom zbiru momenata svih sila koje deluju na tačku, računatih za istu tačku A.

Zakon o promeni momenta količine kretanja za tačku

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \sum \vec{M}_A^{\vec{F}_i}$$

- Zakon promene momenta količine kretanja za tačku A u može se napisati u obliku izvoda projekcija na ose

$$\frac{dL_x}{dt} = \sum M_x^{\vec{F}_i}$$
$$\frac{dL_y}{dt} = \sum M_y^{\vec{F}_i}$$
$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z^{\vec{F}_i}$$

- Izvod momenta količine kretanja za jednu osu jednak je algebarskom zbiru momenata svih sila koje deluju na tačku, računatih za istu osu.

Zakon o održanju momenta količine kretanja za tačku

- Ako je pri kretanju tačke u nekom vremenskom intervalu vektorski zbir momenata svih sila za tačku A jednak nuli, onda je moment količine kretanja za istu tačku konstantan u tom istom vremenskom intervalu

$$\sum \vec{M}_A^{\vec{F}_i} = 0 \rightarrow \frac{d\vec{L}_A}{dt} = 0 \rightarrow \vec{L}_A = \vec{C}$$

- Vektor C je konstantan vektor, pa se može zaključiti da u tom slučaju vektor položaja i vektor brzine leže u istoj ravni u istom vremenskom intervalu

$$\vec{L}_A = \vec{C} \rightarrow \vec{r} \times m\vec{V} = \vec{C}$$

Zakon o održanju momenta količine kretanja za osu

- Ako je pri kretanju tačke u nekom vremenskom intervalu algebarski zbir momenata svih sila koje deluju na tačku za neku osu jednak nuli, onda je moment količine kretanja za tu osu konstantan u tom vremenskom intervalu.

$$\sum M_x^{\vec{F}_i} = 0 \rightarrow L_x = const.$$

- Zakon o promeni količine kretanja primenjuje se pri rešavanju zadataka pri kružnom kretanju ili pri kretanju pod dejstvom sila koje presecaju neku osu, odnosno u slučajevima kada se pogodno može izraziti moment sile pod čijim se dejstvom tačka kreće.

Rad sile

- Ako se napadna tačka dejstva sile pomera duž putanje, onda je rad sile $\vec{F}$ na elementarnom pomeranju $\vec{ds}$ (elementarni rad) skalarni proizvod sile i elementarnog pomeranja

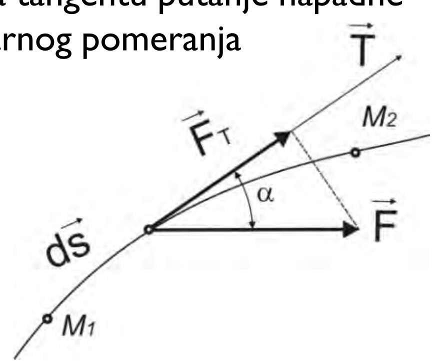
$$\boxed{dA = \vec{F} \cdot d\vec{s}}$$

- Elementarni rad se označava sa *dA*

Rad sile

$$dA = F_T \cdot ds = F\, cos\alpha\, ds$$

- Elementarni rad sile predstavlja proizvod projekcije sile na tangentu putanje napadne tačke i elementarnog pomeranja

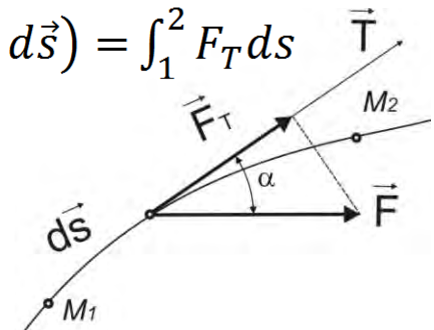


- Rad zavisi od sile i elementarnog pomeranja

Rad sile $dA = F_T \cdot ds = F\, cos\alpha\, ds$

- Rad na konačnom pomeranju između položaja M_I i M_2

$$A_{1,2} = \int_1^2 (\vec{F} \cdot d\vec{s}) = \int_1^2 F_T ds$$



- Integral je moguće izračunati kada je $F_T = F_T(s)$

Analitički rad sile

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{s} = Xdx + Ydy + Zdz$$

- Rad na konačnom pomeranju između položaja M_I i M_2

$$A = \int_1^2 Xdx + \int_1^2 Ydy + \int_1^2 Zdz$$

- Rad sile ima dimenziju Nm
- Rad rezultantne sile koja deluje na jednu tačku (sučeljne sile) jednak je algebarskom zbiru radova komponenata

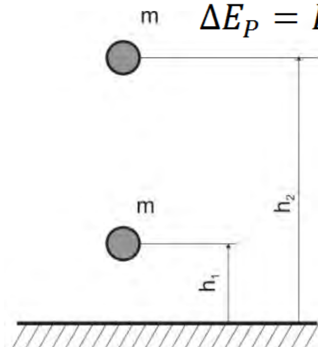
Konzervativne sile

- Sile kod kojih rad ne zavisi od oblika putanje, već zavisi samo od jednog i drugog položaja napadne tačke.
- Primer za konzervativne sile: sila Zemljine teže, elektomagnetna sila u elektromagnetnom polju
- Vrednost konzervativne sile zavisi od položaja tačke
- Elementarni rad konzervativne sile predstavlja totalni diferencijal funkcije koordinata

Konzervativne sile

- Rad konzervativne sile je potencijalna energija sa negativnim znakom
- Primer promene potencijalne energije u polju Zemljine teže

$$\Delta E_P = E_{P2} - E_{P1} = mgh_2 - mgh_1$$



Razlika potencijalne energije zavisi samo od razlike položaja tačke, a ne zavisi od putanje kojom je tačka iz jednog položaja dospela u drugi

Kinetička energija

- Kinetička energija ili živa sila materijalne tačke predstavlja poluproizvod mase i kvadrata brzine tačke

$$\boxed{E_K = \frac{1}{2} m V^2}$$

- Dimenzija kinetičke energije je J=Nm
- Kinetička energija se može izraziti kao zbir poluproizvoda kvadrata projekcija brzine i mase

$$E_K = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

Zakon o promeni kinetičke energije

- Priraštaj kinetičke energije materijalne tačke na elementarnom pomeranju jednak je zbiru elementarnih radova svih sila koje deluju na tačku, na tom pomeranju $\boxed{dE_K = \sum d\, A_i}$
- Promena kinetičke energije materijalne tačke pri pomeranju između dva položaja tačke jednaka je zbiru radova svih sila koje deluju na tačku na tom pomeranju

$$\boxed{E_{K2} - E_{K1} = \sum A_i}$$

Zakon o održanju mehaničke energije

$$\boxed{E = E_K + E_p = const.}$$

- Poseban slučaj zakona o promeni kinetičke energije: kada na tačku deluju samo konzervativne sile, elementarni rad svih konzervativnih sila je:

$$\sum dA = -dE_{P1} - dE_{P2} \ldots - dE_{Pn} = -dE_P$$

- Na osnovu izraza za priraštaj kinetičke energije $dE_K = \sum d\,A_i$

$$dE_K + dE_p = 0 \rightarrow dE = 0$$

$$\boxed{E = E_K + E_p = const.}$$

Zakon o održanju mehaničke energije

$$\boxed{E = E_K + E_p = const.}$$

- Zakon o održanju mehaničke energije važi i kad na tačku deluju nekonzervativne sile, ali pod uslovom da ne vrše rad ili da je zbir radova svih nekonzervativnih sila koje deluju na tačku u posmatranom vremenskom intervalu jednak nuli

Snaga – mehanička snaga

$$\boxed{P = F_T \cdot V}$$

- Snaga predstavlja rad sile u jedinici vremena ili brzinu vršenja rada

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{F_T ds}{dt} = F_T \cdot \frac{ds}{dt} = F_T \cdot V$$

- Snaga je količnik izvršenog rada i vremenskog intervala u kom je rad izvršen
- Jedinica za snagu je vat W

$$\boxed{W = \frac{J}{s} = \frac{Nm}{s}}$$

Prinudno kretanje materijalne tačke

- Materijalna tačka može da se kreće slobodno u prostoru pod dejstvom sila
- Kada je kretanje materijalne tačke u prostoru ograničeno delovanjem materijalnih tela takvo kretanje se naziva prinudnim kretanjem
- Tela koja ograničavaju slobodno kretanje tačke u prostoru nazivaju se mehaničkim vezama
- Geometrijski posmatrano veze mogu biti u obliku površi ili u obliku linije

Prinudno kretanje materijalne tačke

- Ako se materijalna tačka kreće po vezi onda koordinate tačke zadovoljavaju jednačine veze
- Kada se tačka kreće po liniji onda koordinate tačke zadovoljavaju jednačinu linije
- Kada se tačka kreće po površi onda koordinate tačke zadovoljavaju jednačinu te površi
- Sila kojom veza deluje na materijalnu tačku zove se reakcija veze
- Obrnuto, sila kojom materijalna tačka deluje na vezu zove se sila pritiska na vezu

Reakcije veze

- Veze mogu biti:
  - Idealne veze bez trenja
  - Veze sa trenjem
- Kod idealne veze reakcija veze leži na normalnoj ravni krivine i nema komponentu u tangentoj ravni
- Realna veza sa trenjem ima normalnu komponentu u normalnoj ravni i tangencijalnu komponentu u pravcu tangente, a suprotnog smera od brzine kretanja materijalne tačke

Reakcije veze

$$\boxed{F_\mu = \mu \cdot N}$$

- Pri kretanju po hrapavoj vezi reakcija veze ima komponentu u pravcu normale i komponentu u pravcu tangente koju nazivamo silom trenja, koja ima pravac brzine kretanja, ali suprotan smer
- Prema Kulonovim zakonima trenja, sila trenja jednaka je proizvodu normalne reakcije veze i kinematskog koeficijenta trenja

$$\boxed{F_\mu = \mu \cdot N}$$

- Kinematski koeficijent trenja je koeficijent trenja kretanja (u statici koeficijent trenja mirovanja)

Prinudno kretanje po liniji

- Pri kretanju po glatkoj liniji materijalne tačke na koju deluje više aktivnih sila

$$m\,\vec{a} = \sum \vec{F}_i^a + \vec{N}_N + \vec{N}_B$$

- Projektovanjem izraza na ose prirodnog koordinatnog sistema i ako se zna $a_T = \ddot{s},\ \ a_N = \frac{\dot{s}^2}{R_k},\ \ a_B = 0$

$$m\ddot{s} = \sum F_{iT}^a$$

$$m\frac{\dot{s}^2}{R_k} = \sum F_{iN}^a + N_N$$

$$0 = \sum F_{iB}^a + N_B$$

Prinudno kretanje po liniji $m\ddot{s} = \sum F_{iT}^{a}$

- Jednačina predstavlja jednačinu kretanja po liniji čijom integracijom se dobija zakon kretanja s=s(t)
- Često se u rešavanju zadataka postupak pojednostavljuje korišćenjem zakona o promeni kinetičke energije

$$\ddot{s} = \frac{d\dot{s}}{dt} = \frac{ds}{dt}\frac{d\dot{s}}{ds} = \dot{s}\frac{d\dot{s}}{ds}$$

- Eliminacijom vremena iz izraza za ubrzanje može se napisati gornja jednačina

$$m\ddot{s} = \sum F_{iT}^{a} \rightarrow m\dot{s}\frac{d\dot{s}}{ds} = \sum F_{iT}^{a}$$

$$m\dot{s}\,d\dot{s} = \sum F_{iT}^{a}\,ds \rightarrow d\left(\frac{1}{2}m\dot{s}^{2}\right) = \sum dA_{i}^{a}$$

$$\boxed{E_{K2} - E_{K1} = \sum A_{i}^{a}}$$

Promena kinetičke energije kod kretanja po vezi

$$\boxed{E_{K2} - E_{K1} = \sum A_{i}^{a}}$$

- Dobijeni izraz za promenu kinetičke energije pokazuje da je promena jednaka zbiru radova aktivnih sila koje su delovale na materijalnu tačku u posmatranom periodu.
- Kako se uočava, reakcije veze ne vrše rad, pa ni ne utiču na promenu kinetičke energije.

za izračunavanje radova uzimati samo aktivne sile

Dalamberov princip za materijalnu tačku

- Kod posmatranog kretanja po nepokretnoj liniji kao vezi, ukupne reakcije veze mogu se označiti sa F_W a diferencijalna jednačina kretanja ima oblik

$$m\,\vec{a} = \sum \vec{F}_i^a + \vec{F}_W$$

- Prebacivanjem svih elemenata na istu stranu, jednačina dobija oblik

$$\sum \vec{F}_i^a + \vec{F}_W - m\,\vec{a} = 0$$

- Formalno sila se može obeležiti sa

$$\boxed{\vec{F}^{in} = -\,m\,\vec{a}}$$

Dalamberov princip za materijalnu tačku

- Tako se diferencijalna jednačina kretanja

$$m\,\vec{a} = \sum \vec{F}_i^a + \vec{F}_W$$

- Može napisati kao jednačina koja ima formu statičke jednačine ravnoteže sila

$$\sum \vec{F}_i^a + \vec{F}_W + \vec{F}^{in} = 0$$

- Ovakav izraz zamenuje diferencijalnu jednačinu pa se prema Dalamberovom principu definiše statička jednačina

Dalamberov princip za materijalnu tačku

$$\sum \vec{F}_i^a + \vec{F}_W + \vec{F}^{in} = 0$$

DALAMBEROV PRINCIP

Ako se u bilo kom trenutku pri kretanju tačke pored sila koje deluju na tačku doda sila inercije, dobiće se sistem sila u ravnoteži

- Sile koje se uzimaju u obzir su date sile ako je kretanje slobodno
- Sile koje se uzimaju u obzir su date sile i reakcije veza ako je kretanje prinudno