BRZINA I UBRZANJE TAČKE

U Dekartovom koordinatnom sistemu i prirodnom koordinatnom sistemu

Srednja brzina tačke

- Tokom vremena uočeni vektor položaja tačke M se menja
  - Kretanje tačke M određeno je vektorskom funkcijom

$$\vec{r} = \vec{r}\,(t)$$

- U nekom konačnom vremenskom intervalu Δ t tačka M pređe u položaj M'
- Vektor položaja se promeni za $\Delta \vec{r}$

Srednja brzina tačke

- Srednja brzina tačke je vektorska veličina
- Predstavlja priraštaj vektora položaja $\overrightarrow{\Delta r}$ u posmatranom vremenskom intervalu Δ t

3

Srednja brzina tačke

$$\vec{V}_{SR} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}$$

- Srednja brzina predstavlja količnik vektora $\overrightarrow{\Delta r}$ i skalara Δ t
- Srednja brzina tačke je kolinearna sa vektorom $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{\Delta r}$

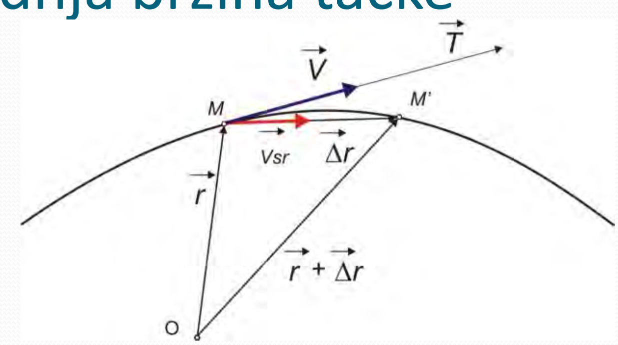
4

Srednja brzina tačke

- Srednja brzina u nekom vremenskom intervalu karakteriše promenu vektora položaja za interval kao celinu
- Na osnovu srednje brzine ne može se zaključiti o načinu promene položaja tačke M unutar posmatranog intervala
- Ukoliko je vremenski interval manji utoliko srednja brzina preciznije definiše promenu položaja tačke M u posmatranom vremenskom intervalu

5

Srednja brzina tačke



- Ukoliko je vremenski interval manji utoliko srednja brzina preciznije definiše promenu položaja tačke M u posmatranom vremenskom intervalu

6

Brzina tačke

- Brzina tačke M u trenutku t predstavlja vektor

$$\vec{V} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta t \to 0} V_{SR} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{dr}}{dt}$$

- Brzina je jednaka izvodu vektora položaja po vremenu

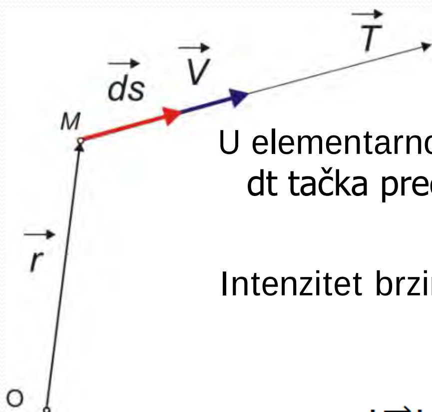
7

Brzina tačke

- Iz definicije brzine se vidi da kada dt teži nuli tada i $\overrightarrow{\Delta r}$ teži nuli, a to znači da su tačke M i M′ beskonačno bliske odnosno da pravac vektora $\overrightarrow{\Delta r}$ leži u pravcu luka ds $\vec{T}=\vec{dr}$
- Pravac vektora $\vec{V}$ pada na pravac tangente na putanju, odnosno pravac promene vektora položaja poklapa se sa putanjom duž koje je i vektor brzine $\vec{V}$

8

Brzina tačke



U elementarnom vremenskom intervalu dt tačka pređe put ds koje je

$$|ds| = |\overrightarrow{dr}|$$

Intenzitet brzine je

$$|\vec{V}| = \left|\frac{\overrightarrow{dr}}{dt}\right| = \left|\frac{ds}{dt}\right|$$

9

Brzina tačke

$$|\vec{V}| = \left|\frac{\overrightarrow{dr}}{dt}\right| = \left|\frac{ds}{dt}\right|$$

- Ovo je saglasno sa pojmom brzine kretanja koji se koristi u svakodnevnom životu
- Smer brzine definiše smer promene vektora položaja
- Usvaja se smer tangente kao pozitivan, a brzina može imati pozitivan ili negativan smer
- Brzina ima jedinice m/s km/h

10

Brzina tačke

$$|\vec{V}| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \left|\frac{ds}{dt}\right|$$

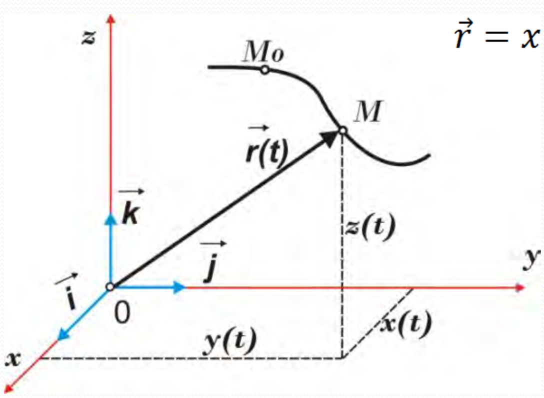
- U mehanici i se izvod određene promenljive koja zavisi od vremena po vremenu obeležava sa tačkom iznad promenljive

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t), \qquad \frac{dy(t)}{dt} = \dot{y}(t), \qquad \frac{dz(t)}{dt} = \dot{z}(t)$$

Brzina tačke u Dekartovom koordinatnom sistemu

- Vektor položaja tačke je definisan kao:



$$\vec{r} = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$$

Brzina tačke u Dekartovom koordinatnom sistemu

- Diferenciranjem vektora položaja po vremenu dobija se brzina tačke

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

- Prema pravilima diferenciranja svaki sabirak se diferencira po vremenu

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}\right]$$

$$\vec{V} = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k}$$

13

Brzina tačke u Dekartovom koordinatnom sistemu

- Brzina $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$
- U Dekartovom koordinatnom sistemu

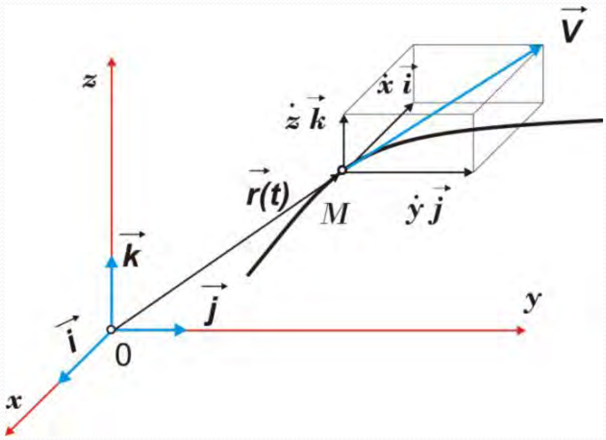
$$\vec{V} = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k}$$

$$\vec{V} = V_x\vec{\imath} + V_y\vec{\jmath} + V_z\vec{k}$$

$$V_x = \dot{x}, \qquad V_y = \dot{y}, \qquad V_z = \dot{z}$$

14

Brzina tačke u Dekartovom koordinatnom sistemu



$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

15

Brzina tačke u Dekartovom koordinatnom sistemu

- Kadrat brzine tačke

$$V^2 = \vec{V} \cdot \vec{V} = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$$

- Intenzitet brzine

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

- Uglovi vektora brzine sa koordinatnim osama

$$cos\alpha_V = \frac{\dot{x}}{V}, \qquad cos\beta_V = \frac{\dot{y}}{V}, \quad cos\gamma_V = \frac{\dot{z}}{V}$$

16

Brzina tačke u Dekartovom koordinatnom sistemu

- Kod pravolinijskog kretanja tačke, ako kretanje ima pravac x ose jednačine kretanja su:

$$x = x(t), \qquad y = 0, \;\; z = 0$$

- Projekcije brzine su:

$$\dot{x} = \dot{x}(t), \qquad \dot{y} = 0, \;\; \dot{z} = 0$$

$$\vec{V} = V_x\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + 0\vec{k} = V_x\vec{\imath}$$

- Vektor brzine ima pravac kretanja

17

Brzina tačke u Dekartovom koordinatnom sistemu

- Kada su poznati zakoni promene projekcija brzine

$$\vec{V} = V_x(t)\vec{\imath} + V_y(t)\vec{\jmath} + V_z(t)\vec{k}$$

$$V_x = \dot{x}, \qquad V_y = \dot{y}, \qquad V_z = \dot{z}$$

- Zakoni kretanja se dobijaju integraljenjem

$$x = \int V_x(t)dt + C_1$$

$$t = 0 \rightarrow C_1, C_2, C_3$$

$$y = \int V_y(t)dt + C_2$$

$$x = x_0, \; y = y_0, \; z = z_0$$

$$z = \int V_z(t)dt + C_3$$

18

Brzina tačke u prirodnom sistemu

- Vektor položaja je definisan kao:

$$\vec{r} = s(t)\vec{T}$$

- Brzina je po definiciji:

$$\vec{V} = \frac{ds}{dt} \cdot \vec{T} = \dot{s} \cdot \vec{T}$$

- Diferenciranjem vektora položaja po vremenu

$$\vec{V} \overset{\text{def}}{=} \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{s} \cdot \vec{T}$$

19

Brzina tačke u prirodnom sistemu

- Brzina po definiciji: $\vec{V} = \frac{ds}{dt} \cdot \vec{T} = \dot{s} \cdot \vec{T}$
- Projekcije brzine na normalu i binormalu su jednake 0
- U slučaju kada je poznat zakon promene brzine integracijom se dobija zakon kretanja

$$s = \int V_T\,(t)dt + C$$

- Konstanta C dobija se za t=0, $s=s_o$

20

Brzina tačke u prirodnom sistemu

- Ako su poznati zakoni promene projekcija brzine na ose Dekartovog koordinatnog sistema

$$\vec{V} = V_x(t)\vec{i} + V_y(t)\vec{j} + V_z(t)\vec{k}$$

$$V_x = \dot{x}, \qquad V_y = \dot{y}, \qquad V_z = \dot{z}$$

- Zakon kretanja u prirodnom koordinatnom sistemu se dobija integracijom

$$s = \pm \int \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\ dt + C$$

- Konstanta C dobija se za t=0, s=s_o ; znak + ukoliko se koordinata povećava, a – kada se smanjuje

Srednje ubrzanje tačke

- Veličina koja karakteriše promenu brzine zove se ubrzanje
- Po analogiji sa objašnjenjem za brzinu dobija se srednje ubrzanje

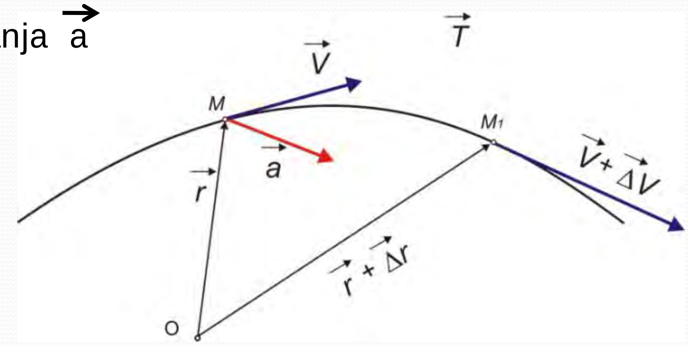
$$\vec{a}_{sr} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{V}(t+\Delta t)-\vec{V}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$$

- Vektor srednjeg ubrzanja kolinearan je sa vektorom

$$\Delta\vec{V} = \overrightarrow{M'M'}_1$$

Srednje ubrzanje tačke

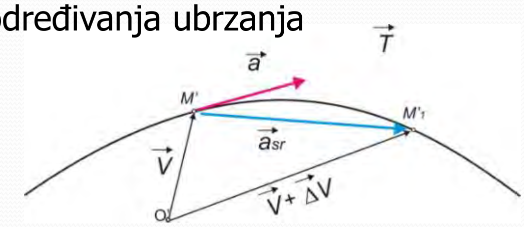
- Ukoliko se smanjuje interval Δt , smanjivaće se i priraštaj brzine $\Delta\vec{V}$, a količnik $\Delta\vec{V}/\Delta t$ težiće vektoru ubrzanja $\vec{a}$



23

Ubrzanje tačke

- Potreba za smanjenjem intervala vremena radi tačnijeg određivanja ubrzanja



$$\vec{a} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta t \to 0} a_{SR} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta V}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{dV}}{dt}$$

24

Ubrzanje tačke

- Ubrzanje predstavlja izvod brzine po vremenu

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \dot{\vec{V}}$$

- Vektor brzine je izvod vektora položaja po vremenu pa je ubrzanje drugi izvod vektora položaja po vremenu

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$$

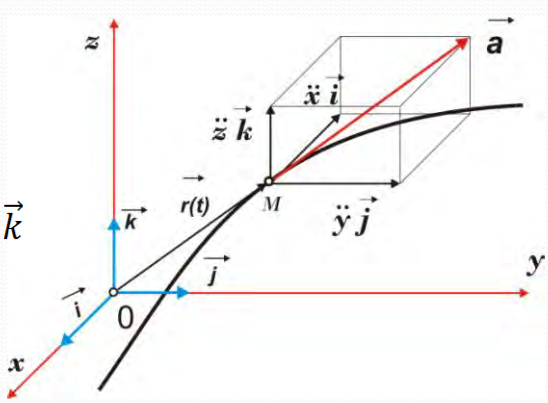
- Ubrzanje ima jedinicu m^2/s

25

Ubrzanje tačke
Dekartov koordinatni sistem

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \dot{\vec{V}}$$

$$\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}$$



26

Ubrzanje tačke
Dekartov koordinatni sistem

- Ubrzanje je izvod brzine po vremenu, drugi izvod vektora položaja po vremenu

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \dot{\vec{V}} = \ddot{\vec{r}}$$

$$\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\,\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\,\vec{k}$$

$$a_x = \ddot{x},\ \ a_y = \ddot{y},\ \ a_z = \ddot{z}$$

27

Ubrzanje tačke
Dekartov koordinatni sistem

- Ubrzanje je vektorski zbir komponenata u pravcu osa

$$\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}$$

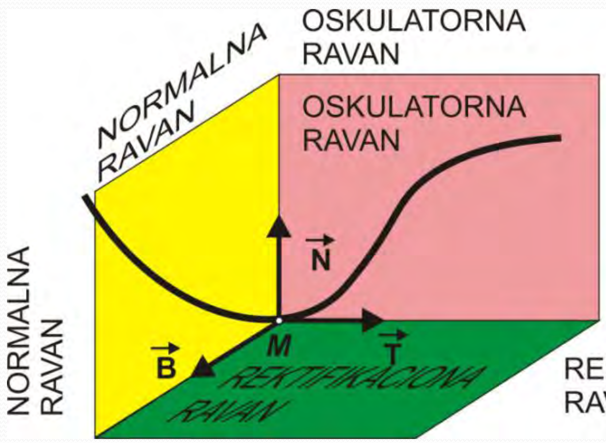
$$\vec{a} = \ddot{x}\,\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\,\vec{k}$$

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

$$cos\alpha_a = \frac{\ddot{x}}{a},\ cos\beta_a = \frac{\ddot{y}}{a},\ cos\gamma_a = \frac{\ddot{z}}{a}$$

28

Prirodni koordinatni sistem



JEDINIČNI VEKTORI

$\vec{T}$ *tangente*

$\vec{N}$ *normale i*

$\vec{B}$ *binormale*

29

Ubrzanje tačke
Prirodni koordinatni sistem

- Ubrzanje je izvod brzine po vremenu

$$\vec{a} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{s}\vec{T}\right) = \ddot{s}\vec{T} + \dot{s}\dot{\vec{T}}$$

- Izvod tangente po vremenu može se odrediti prema pravilima diferenciranja kao proizvod izvoda tangente po koordinati s i izvoda koordinate s po vremenu

$$\frac{d\,\vec{T}}{dt} = \frac{d\,\vec{T}}{ds} \cdot \frac{d\,s}{dt}$$

30

Ubrzanje tačke
Prirodni koordinatni sistem

$$\frac{d\,\vec{T}}{dt} = \frac{d\,\vec{T}}{ds} \cdot \frac{d\,s}{dt}$$

- Poznato je da je izvod tangente $\vec{T}$ po koordinati s jednak proizvodu krivine i vektora normale $\vec{N}$, odnosno količniku normale i poluprečnika krivine

$$\frac{d\,\vec{T}}{ds} = K \cdot \vec{N} = \frac{1}{R_k} \cdot \vec{N}$$

- Izvod prirodne koordinate po vremenu je $\frac{d\,s}{dt} = \dot{s}$

31

Ubrzanje tačke
Prirodni koordinatni sistem

- Izvod tangente: $$\frac{d\,\vec{T}}{dt} = \frac{d\,\vec{T}}{ds} \cdot \frac{d\,s}{dt}$$
- U izrazu za ubrzanje zameniti izvod tangente:

$$\frac{d\,\vec{T}}{dt} = \frac{1}{R_k} \cdot \vec{N} \cdot \dot{s} = \frac{\dot{s}}{R_k} \cdot \vec{N}$$

- Zamenom u izraz za ubrzanje dobija se:

$$\vec{a} = \ddot{s}\vec{T} + \frac{\dot{s}^2}{R_k} \cdot \vec{N}$$

32

Ubrzanje tačke
Prirodni koordinatni sistem

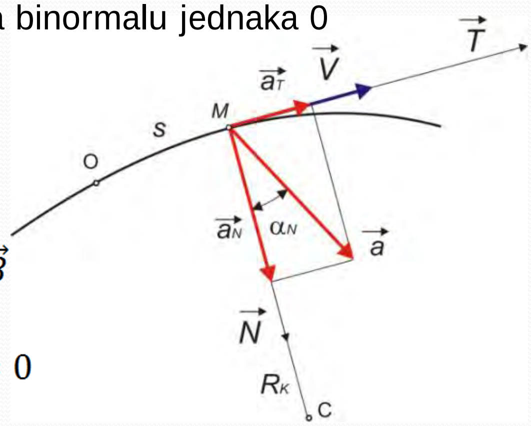
- Na osnovu prethodnog izraza zaključuje se da je projekcija ubrzanja na binormalu jednaka 0

$$\vec{a} = \ddot{s}\vec{T} + \frac{\dot{s}^2}{R_k} \cdot \vec{N}$$

- Pa je ubzanje

$$\vec{a} = \ddot{s} \cdot \vec{T} + \frac{\dot{s}^2}{R_k} \cdot \vec{N} + 0 \cdot \vec{B}$$

$$a_T = \ddot{s}, \;\; a_N = \frac{\dot{s}^2}{R_K}, \;\; a_B = 0$$



33

Ubrzanje tačke
Prirodni koordinatni sistem

- Korišćenjem poznatih relacija

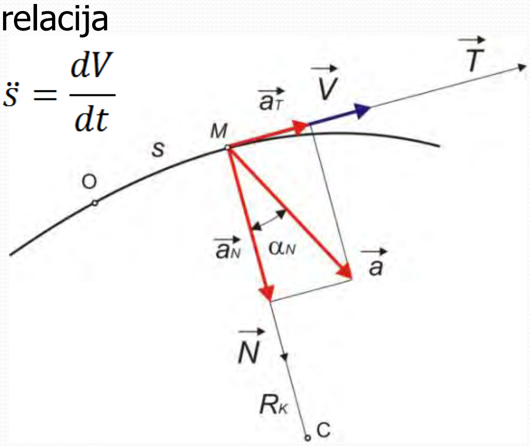
$$\frac{d\,s}{dt} = \dot{s} \qquad \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s} = \frac{dV}{dt}$$

- Ubrzanja su

$$a_T = \frac{dV}{dt}, \;\; a_N = \frac{V^2}{R_K}$$

- odnosno

$$a = \sqrt{{a_T}^2 + \;{a_N}^2}$$

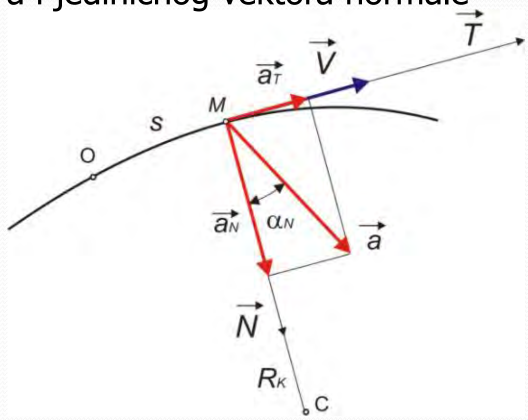


34

Ubrzanje tačke
Prirodni koordinatni sistem

- Ugao vektora ubzanja a i jediničnog vektora normale

$$tg\alpha_N = \frac{a_T}{a_N} = \frac{R_K\dot{V}}{V^2}$$



- Poluprečnik krivine

$$R_K = \frac{V^2}{a_N}$$

35

Kinematski način
određivanja poluprečnika krivine

- Poznati su zakoni kretanja tačke u Dekartovom koordinatnom sistemu

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$$

- Diferenciranjem po vremenu i korišćenjem poznate relacije dobija se brzina tačke

$$V(t) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

- Ponovnim diferenciranjem po vremenu i korišćenjem poznate relacije dobija se ubrzanje tačke

$$a(t) = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

36

Kinematski način određivanja poluprečnika krivine

- Intenzitet tangencijalnog ubrzanja se dobija korišćenjem relacije:

$$|\vec{a}_T| = \left|\frac{d\vec{V}}{dt}\right|$$

- Kako je $\vec{a}_T$ projekcija ubrzanja na pravac brzine $\vec{V}$ to se intenzitet tangencijalnog ubrzanja dobija i kao

$$|\vec{a}_T| = \frac{|\vec{V} \cdot \vec{a}|}{V} \qquad |\vec{a}_T| = \frac{|\dot{x} \cdot \ddot{x} + \dot{y} \cdot \ddot{y} + \dot{z} \cdot \ddot{z}|}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}$$

37

Kinematski način određivanja poluprečnika krivine

- Kako je ukupno ubrzanje

$$a = \sqrt{a_T{}^2 + a_N{}^2}$$

- Normalno ubrzanje se dobija

$$a_N = \sqrt{a^2 - a_T{}^2} = \sqrt{a^2 - |a_T|^2}$$

- Prema ranije definisanom izrazu, dobija se poluprečnik krivine:

$$R_K = \frac{V^2}{a_N}$$

38

Rezime:

- Vektor položaja definiše položaj tačke u odnosu na referentni koordinatni sistem

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

- Izvod vektora položaja po vremenu je brzina

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

- Izvod brzine po vremenu je ubrzanje, odnosno drugi izvod vektora položaja po vremenu

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \dot{\vec{V}} = \ddot{\vec{r}}$$

39

Rezime:

- U Dekartovom koordinatnom sistemu vektor položaja glasi: $\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$
- Izvod vektora položaja po vremenu je brzina

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k}$$

- Izvod brzine po vremenu, odnosno drugi izvod vektora položaja po vremenu je ubrzanje

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \dot{\vec{V}} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\,\vec{k}$$

40

Rezime:

- U prirodnim koordinatama vektor položaja glasi:

$$\vec{r} = s(t)\vec{T}$$

- Izvod vektora položaja po vremenu je brzina

$$\vec{V} = \frac{ds}{dt} \cdot \vec{T} = \dot{s} \cdot \vec{T}$$

- Izvod brzine po vremenu, odnosno drugi izvod vektora položaja po vremenu je ubrzanje

$$\vec{a} = \ddot{s} \cdot \vec{T} + \frac{\dot{s}^2}{R_k} \cdot \vec{N} + 0 \cdot \vec{B}$$

41