

Obnavljanje kretanje krutog tela

Vrste kretanja tela

Određivanje karakteristika kretanja tačaka tela i tela kao celine

Translatorno kretanje

Kružno kretanje tačke

Vrste kretanja krutog tela

Kruto telo u zavisnosti od veza kojima je **izloženo može izvoditi**

- Translatorno kretanje
- **Obrtanje oko nepomične ose**
- **Obrtanje oko nepomične tačke**
- Ravno kretanje

Zadatak kinematike krutog tela

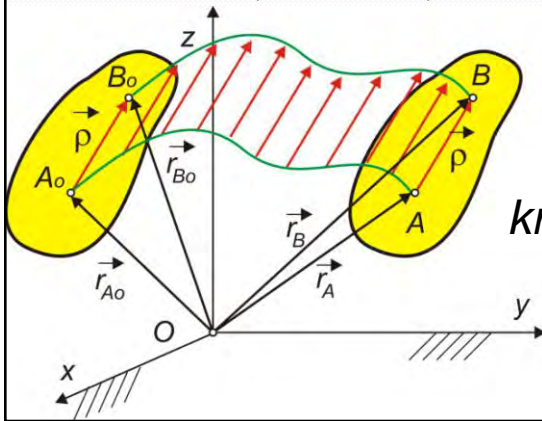
- **Određivanje karakteristika kretanja tačka tela**
- Putanje tačka
- Brzine tačka
- Ubrzanja tačka

Zadatak kinematike krutog tela

- **Određivanje karakteristike kretanja tela kao celine**
- Ugao obrtanja tela
- Ugaona brzina
- Ugaono ubrzanje

Translatorno kretanje krutog tela

- Putanje tačaka krutog tela su identične, samo prostorno pomerene



$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{\rho}$$

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt}$$

kruto telo $\frac{d\vec{\rho}}{dt} = 0$

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt}$$

Translatorno kretanje krutog tela

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt}$$

- Prema ranije definisanim izrazima za brzinu

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{V}_B \quad \frac{d\vec{r}_A}{dt} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{V}_A$$

- Brzine tačaka krutog tela pri translatorskom kretanju su jednake

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A$$

Translatorno kretanje krutog tela

$$\frac{d^2\vec{r}_B}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}_A}{dt^2} \quad \frac{d\vec{v}_B}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt}$$

- Prema ranije definisanim izrazima za ubrzanje

$$\frac{d\vec{v}_B}{dt} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{a}_B \quad \frac{d\vec{v}_A}{dt} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{a}_A$$

- Ubrzanja tačaka krutog tela pri translatorsnom kretanju su jednaka

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A$$

Translatorno kretanje krutog tela

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A \quad \vec{a}_B = \vec{a}_A$$

- Kretanje krutog tela kao celine potpuno je određeno putanjom, brzinom i ubrzanjem jedne (bilo koje) njegove tačke
- Putanje, brzine i ubrzanja krutog tela koje se translatorsno kreće su jednake
- Broj stepeni slobode krutog tela pri translatorsnom kretanju jednak je broju stepeni slobode bilo koje tačke tog tela

Kružno kretanje tačke

- Kada se tačka kreće po kružnoj putanji to kretanje se zove kružno kretanje
- Položaj tačke na putanji određen je lučnom koordinatom

$$s = R\varphi(t)$$

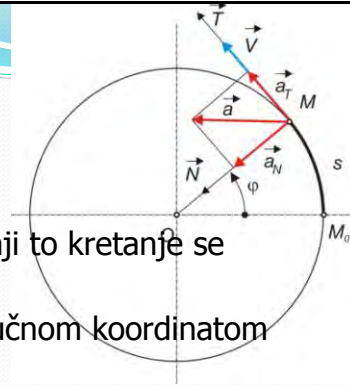
- R je poluprečnik krivine
- Ako je poznat zakon promene ugla, definisana je brzina i ubrzanja tačke

$$\varphi = \varphi(t)$$

$$V = \dot{s} = R \cdot \dot{\varphi} = R\omega$$

$$a_T = \frac{d\dot{s}}{dt} = \ddot{s} = R \cdot \ddot{\varphi} = R \cdot \varepsilon$$

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{(R \cdot \dot{\varphi})^2}{R} = R\dot{\varphi}^2 = R\omega^2$$



Kružno kretanje tačke

- Kod kružnog kretanja srećemo zakon promene ugla u funkciji vremena

$$\varphi = \varphi(t)$$

- Izvod promene ugla po vremenu odnosno ugaonu brzinu

$$\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} = \omega$$

- Izvod promene ugaone brzine po vremenu odnosno drugi izvod promene ugla po vremenu - ugaono ubrzanje

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \varepsilon$$

Kružno kretanje tačke

$$s = R(\omega t + \varphi_0)$$

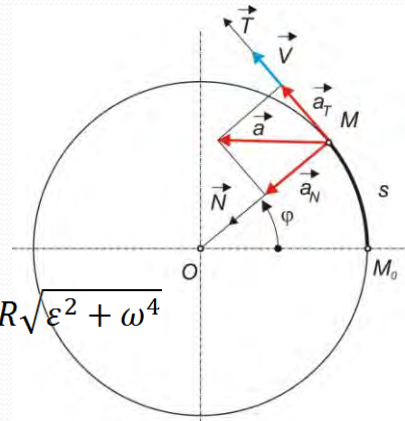
- Izrazi za brzinu i ubrzanja saglasno uvedenim parametrima su

$$V = \dot{s} = R \cdot \dot{\varphi} = R\omega$$

$$a_T = \frac{d\dot{s}}{dt} = \ddot{s} = R\dot{\omega} = R\ddot{\varphi} = R\varepsilon$$

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{(R \cdot \dot{\varphi})^2}{R} = R\dot{\varphi}^2 = R\omega^2$$

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = R\sqrt{\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$



Obrtanje krutog tela oko nepomične ose

Zakoni obrtanja tela

Ugaona brzina i ubrzanje

Brzina i ubrzanje tačaka tela

Obrtanje tela oko nepomične ose

- Jedno od mogućih kretanja tela je obrtanje tela oko nepomične ose
- Ovaj vid kretanja ima veoma široku primenu u tehnici, skoro sve mašine sadrže delove koji se obrću oko odgovarajućih nepomičnih osa.

Obrtanje tela oko nepomične ose

- Primeri primene
- Transportne mašine
- Motori u vozilima, menjači, točkovi, upravljač
- Strug, glodalica, elementi prenosa snage u okviru radnih mašina
- Primena u hidraulici i pneumatici - hidro pumpe i motori
- Energetika - turbine, generatori

Obrtanje tela oko nepomične ose

- Kod obrtanja krutog tela oko nepomične ose putanje brzine i ubrzanja pojedinih tačaka krutog tela su različiti
- Putanje, brzine i ubrzanja su određeni unutrašnjim vezama (kruto telo) i spoljašnjom vezom - nepomičnom osom
- Zakone međusobnog odnosa putanja, brzine i ubrzanja tačaka tela potpuno određuju ugao obrtanja, ugaona brzina i ugaono ubrzanje

Karakteristike kretanja tela kao celine kod obrtanja krutog tela oko nepomične ose

- Ugao obrtanja
- Ugaona brzina
- Ugaono ubrzanje

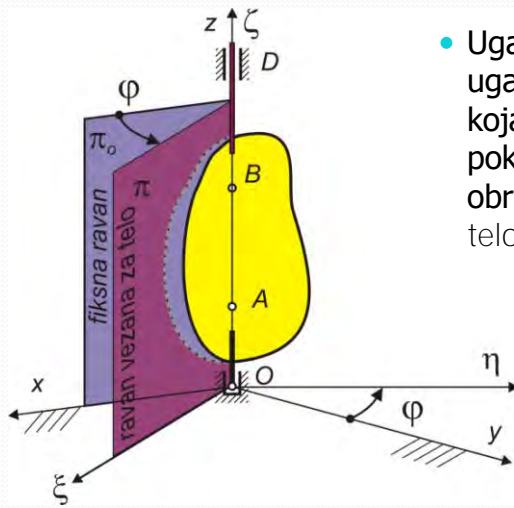
Obrtanje tela oko nepomične ose

- Kod kretanja tela oko dve nepomične tačke sve tačke koje se nalaze na pravcu koji prolazi kroz te dve tačke ostaju nepomične tokom kretanja tela
- Ovakvo kretanje se naziva obrtanje tela oko **nepomične ose**

Obrtanje tela oko nepomične ose

- Telo ima samo jedan stepen slobode
- **Položaj tela potpuno je određen jednom** generalisanom koordinatom
- Kao generalisana koordinata usvaja se ugao obrtanja

Obrtanje tela oko nepomične ose

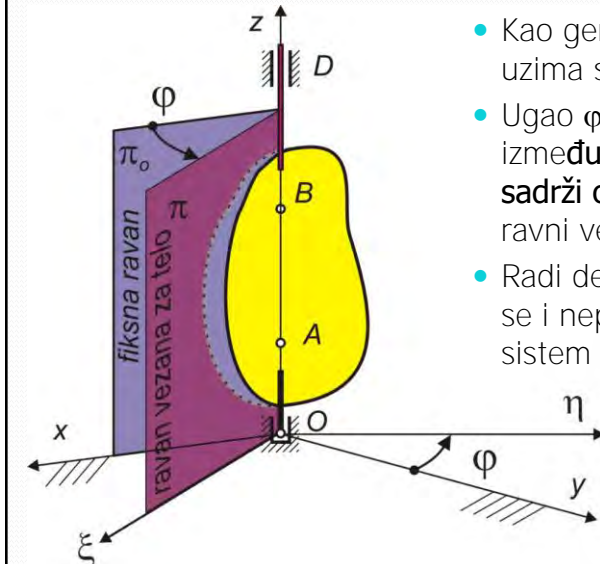


- Ugao obrtanja se definiše kao ugao između nepomične ravni koja sadrži osu obrtanja i pokretne ravni koja sadrži osu obrtanja i čvrsto je vezana za telo

Obrtanje tela oko nepomične ose

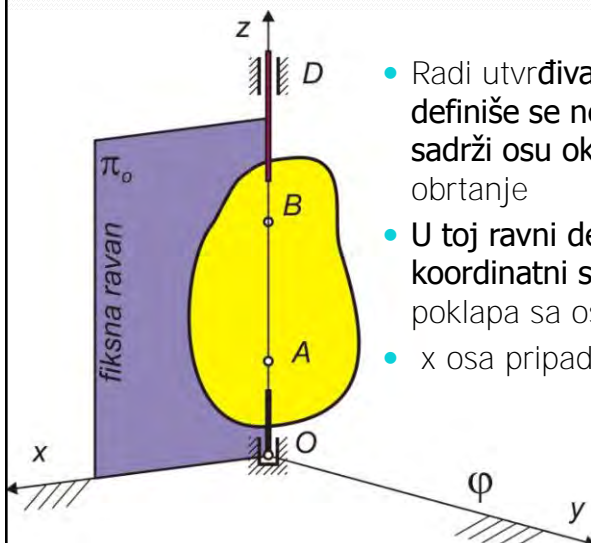
- Kretanje tela se odvija oko dve tačke krutog tela
- Sve tačke koje se nalaze na pravoj AB krutog tela su nepomične
- Za potpuno određivanje položaja dovoljna je jedna koordinata; dakle, telo ima jedan stepen slobode

Obrtanje tela oko nepomične ose



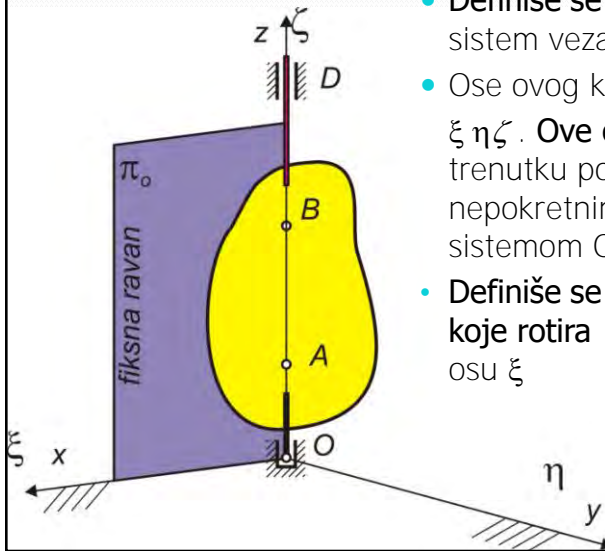
- Kao generalisana koordinata uzima se ugao obrtanja φ
- Ugao φ se definiše kao ugao između nepokretne ravni koja sadrži osu obrtanja i pokretne ravni vezane za telo
- Radi definisanja smeru usvaja se i nepokretni koordinatni sistem $Oxyz$

Obrtanje tela oko nepomične ose



- Radi utvrđivanja ugla rotacije definiše se nepokretna ravan π_0 koja sadrži osu oko koje se odvija obrtanje
- U toj ravni definiše se nepokretni koordinatni sistem čija z osa se poklapa sa osom rotacije
- x osa pripada nepokretnoj ravni π_0

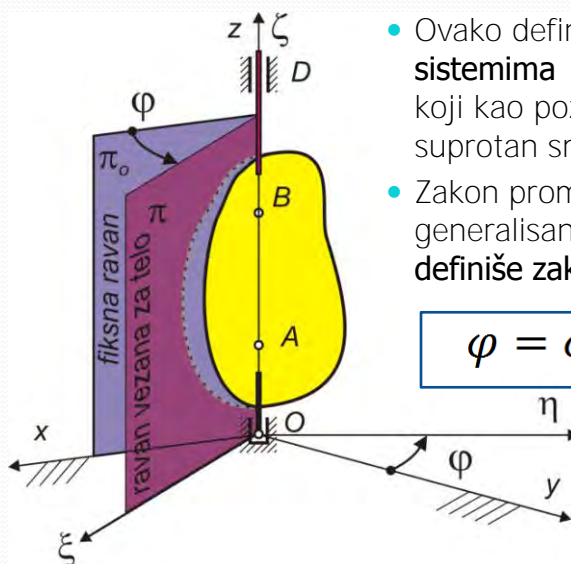
Obrtanje tela oko nepomične ose



- Definiše se i pokretni koordinatni sistem vezan za telo koje rotira
- Ose ovog koordinatnog sistema su $\xi \eta \zeta$. Ove ose se u početnom trenutku poklapaju sa nepokretnim koordinatnim sistemom $Oxyz$
- Definiše se i ravan π vezana telo koje rotira a sadrži osu rotacije ζ i osu ξ

Obrtanje tela oko nepomične ose

– ugao obrtanja

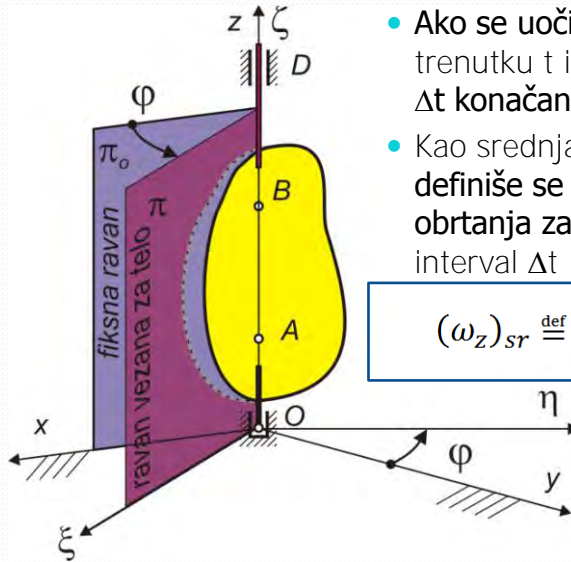


- Ovako definisanim koordinatnim sistemima određuje se ugao φ koji kao pozitivan smer ima smer suprotan smeru satne kazaljke
- Zakon promene ugla je generalisana koordinata koja definiše zakon kretanja

$$\varphi = \varphi(t)$$

Obrtanje tela oko nepomične ose

– srednja ugaona brzina



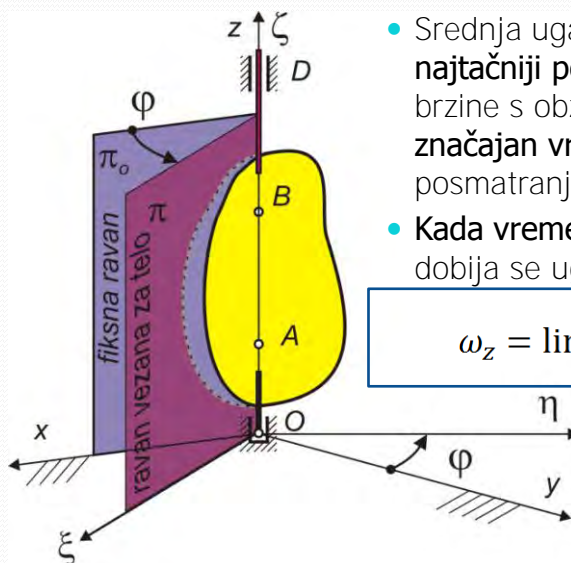
- Ako se uoči ugao obrtanja u trenutku t i trenutku $t+\Delta t$ gde je Δt konačan priraštaj vremena
- Kao srednja ugaona brzina definiše se relativni priraštaj ugla obrtanja za konačan vremenski interval Δt

$$(\omega_z)_{sr} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

Obrtanje tela oko nepomične ose

– ugaona brzina

$$\omega_z \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\omega_z)_{sr}$$

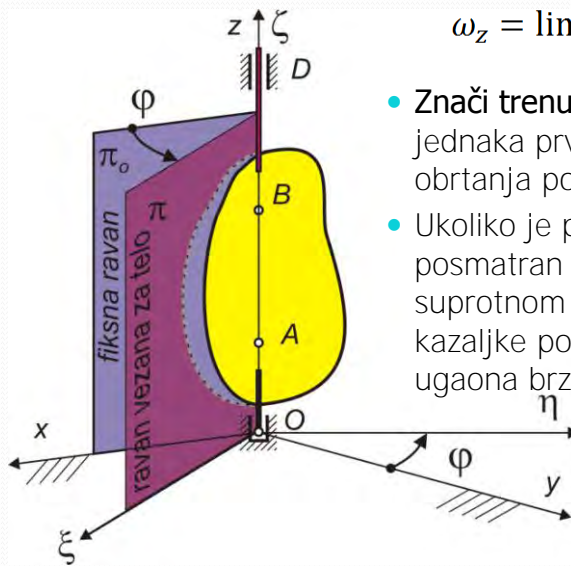


- Srednja ugaona brzina nije najtačniji pokazatelj promene brzine s obzirom na to da je značajan vremenski interval posmatranja
- Kada vremenski interval teži nuli dobija se ugaona brzina

$$\omega_z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

Obrtanje tela oko nepomične ose

– ugaona brzina

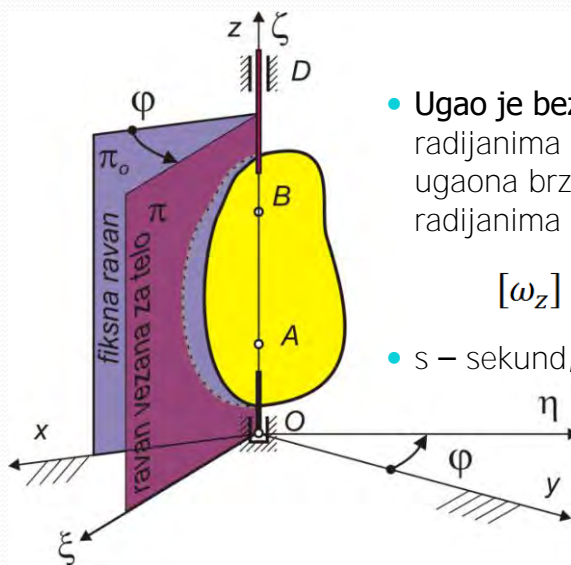


$$\omega_z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

- Znači trenutna ugaona brzina je jednaka prvom izvodu ugla obrtanja po vremenu
- Ukoliko je priraštaj ugla obrtanja posmatran iz vrha z ose u suprotnom smeru od satne kazaljke pozitivan, tada je i ugaona brzina pozitivna i obrnuto

Obrtanje tela oko nepomične ose

– ugaona brzina



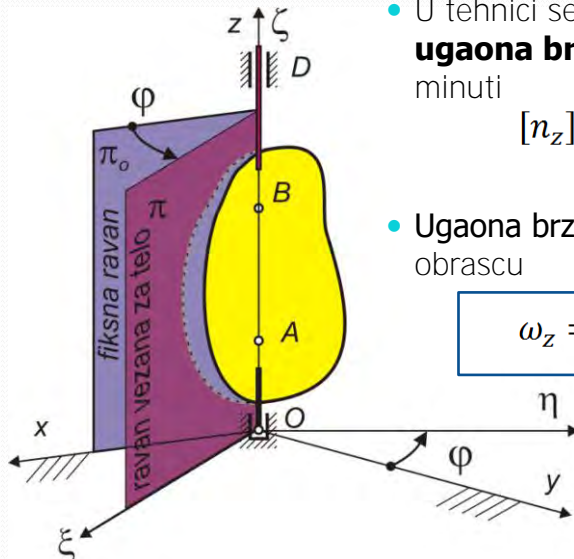
- Ugao je bezdimenziona veličina u radianima pa se po definiciji ugaona brzina izražava u radianima u sekundi

$$[\omega_z] = \left[\frac{1}{T} \right] = \left[\frac{1}{s} \right]$$

- s – sekund, jedinica za vreme

Obrtanje tela oko nepomične ose

– ugaona brzina



- U tehnici se koristi **tehnička ugaona brzina** - broj obrta u minuti

$$[n_z] = \left[\frac{\text{obr}}{\text{min}} \right]$$

- Ugaona brzina se određuje po obrascu

$$\omega_z = \frac{2\pi n_z}{60} = \frac{\pi n_z}{30}$$

Obrtanje tela oko nepomične ose

– ugaono ubzanje

- Ugaona brzina u trenutku t je

$$\omega_z(t)$$

- U trenutku $t + \Delta t$ nastaje promena ugaone brzine na

$$\omega_z(t + \Delta t)$$

- Promena ugaone brzine je

$$\Delta\omega_z = \omega_z(t + \Delta t) - \omega_z(t)$$

- Relativni priraštaj brzine u vremenskom intervalu Δt naziva se srednjim ugaonim ubrzanjem

$$(\varepsilon_z)_{sr} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\omega_z(t + \Delta t) - \omega_z(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta\omega_z}{\Delta t}$$

Obrtanje tela oko nepomične ose

– ugaono ubrzanje

- Granična vrednost srednjeg ugaonog ubrzanja kad vremenski interval teži nuli naziva se trenutno ugaono ubrzanje

$$\varepsilon_z \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\varepsilon_z)_{sr}$$

- Trenutno ugaono ubrzanje po definiciji je izvod ugaone brzine po vremenu

$$\varepsilon_z \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\varepsilon_z)_{sr} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega_z}{\Delta t} = \frac{d\omega_z}{dt} = \dot{\omega}_z$$

- Ugaono ubrzanje je drugi izvod promene ugla po vremenu

$$\varepsilon_z = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \ddot{\varphi}$$

Obrtanje tela oko nepomične ose

– ugaono ubrzanje

- Dimenzija ugaonog ubrzanja je radijan u sekundi na kvadrat ili jedan sa sekundom na kvadrat

$$[\varepsilon_z] = \left[\frac{1}{T^2} \right] = \left[\frac{1}{s^2} \right]$$

- s – sekund, jedinica za vreme

Obrtanje tela oko nepomične ose

- Vektor ugaone brzine je vektor čiji je intenzitet jednak apsolutnoj vrednosti prvog izvoda ugla obrtanja po vremenu, a smer je takav da obrtanje gledano iz vrha ose ima suprotan smer od smera satne kazaljke

$$\vec{\omega} = \omega_z \vec{k} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{k} = \dot{\varphi} \vec{k}$$

Obrtanje tela oko nepomične ose

- Vektor ugaonog ubrzanja jednak je prvom izvodu vektora ugaone brzine po vremenu

$$\vec{\varepsilon}_z = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\omega_z}{dt} \vec{k} + \omega_z \frac{d\vec{k}}{dt} = \varepsilon_z \vec{k}$$

- Izvod jediničnog vektora po vremenu je nula jer su jedinični vektori koordinatnog sistema Oxyz nepokretni

Obrtanje tela oko nepomične ose

- Zavisno od smera ugaone brzine i ugaonog ubrzanja **postoje 3 slučaja:**
- Ugaona brzina i ugaono ubrzanje su istog smera, javlja se porast brzine pa je to ubrzano obrtanje tela oko ose
- Ugaona brzina i ugaono ubrzanje su suprotnih smerova pa se javlja pad ugaone brzine i to je usporeno obrtanje tela oko ose
- **Ugaono ubrzanje je jednako nuli u konačnom intervalu vremena i to je ravnomerno obrtanje**

Obrtanje tela oko nepomične ose

- zakon obrtanja

- Ravnomerno obrtanje – ugaono ubrzanje tela koje se **obrtće oko ose jednako je nuli** $\varepsilon_z = 0$

$$\omega_z = \text{constant.}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_z$$

$$\int d\varphi = \omega_z \int dt$$

- Zakon obrtanja predstavlja linearnu funkciju vremena

$$\varphi = \omega_z t + \varphi_0$$

Obrtanje tela oko nepomične ose

- Ravnomerno promenljivo obrtanje – ugaono ubrzanje tela koje se obrće oko ose je konstantno

$$\varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \text{constant}$$

$$\int d\omega_z = \varepsilon_z \int dt$$

- Brzina obrtanja predstavlja linearnu funkciju vremena

$$\omega_z = \varepsilon_z t + \omega_0$$

Obrtanje tela oko nepomične ose

- Ravnomerno promenljivo obrtanje – ugaono ubrzanje tela koje se obrće oko ose je konstantno $\varepsilon_z = \text{constant}$.

$$\omega_z = \varepsilon_z t + C_1$$

$$\int d\varphi = \int (\varepsilon_z t + C_1) dt = \int \varepsilon_z t dt + C_1 \int dt + C_2$$

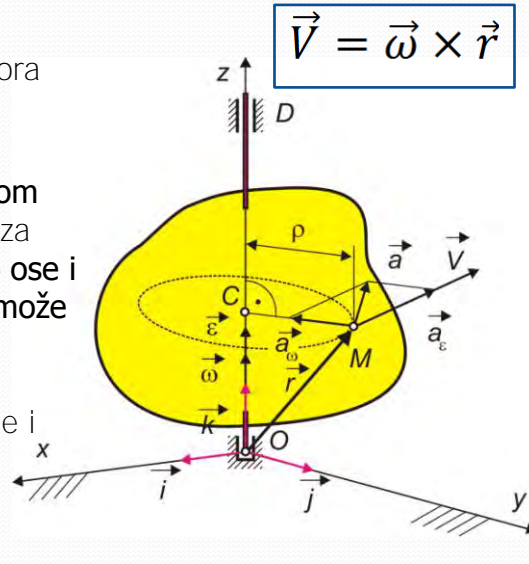
$$\varphi = \int \varepsilon_z t dt + C_1 \int dt + C_2 \quad t = 0 \rightarrow C_1 = \omega_0, C_2 = \varphi_0$$

- Zakon obrtanja predstavlja kvadratnu funkciju vremena

$$\varphi = \varepsilon_z \frac{t^2}{2} + \omega_0 t + \varphi_0$$

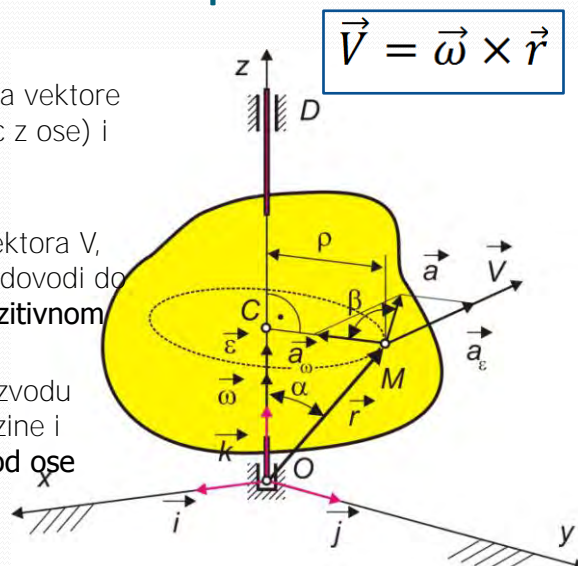
Obrtanje tela oko nepomične ose

- Brzina po definiciji predstavlja izvod vektora položaja po vremenu
- Ako se napiše vektor položaja u koordinatnom sistemu xyz vezanom za telo koje se obrće oko ose i potraži njegov izvod, može se pokazati da brzina predstavlja vektorski proizvod ugaone brzine i vektora položaja



Obrtanje tela oko nepomične ose

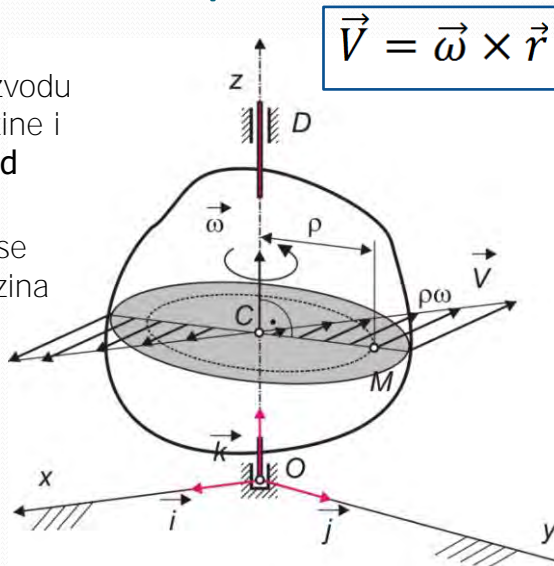
- Vektor brzine:
 - Ima pravac upravan na vektore ugaone brzine (pravac z ose) i vektor položaja tačke
 - Smer je takav da se posmatrano iz vrha vektora V, vektor ugaone brzine dovodi do vektora položaja u pozitivnom mat. smeru
 - Intenzitet jednak proizvodu intenziteta ugaone brzine i najkraćeg rastojanja od ose



Obrtanje tela oko nepomične ose

- Vektor brzine
- Intenzitet jednak proizvodu intenziteta ugaone brzine i **najkraćeg rastojanja od ose**
- Kako se udaljava od ose obrtanja tako raste brzina za istu ugaonu brzinu

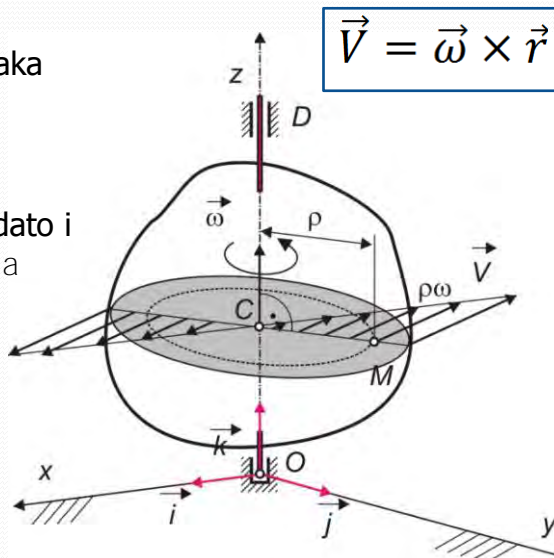
$$V = \omega r \sin \alpha = \omega \rho$$



Obrtanje tela oko nepomične ose

- **Jasno je da brzine tačaka** tela linearno rastu sa udaljavanjem od ose
- **Brzina tačaka na osi jednaka je nuli** što je dato i u definiciji obrtanja tela oko ose

$$V = \omega r \sin \alpha = \omega \rho$$



Obrtanje tela oko nepomične ose

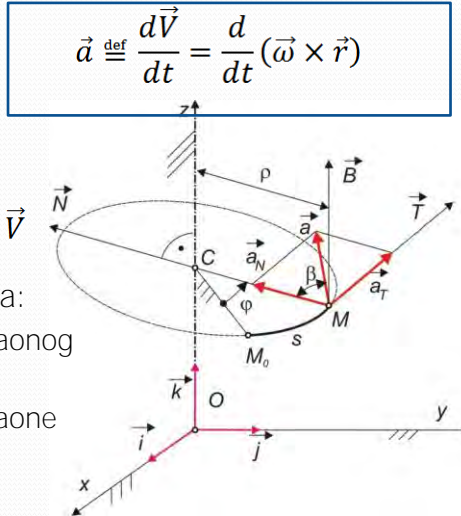
- brzina

- Ubrzanje proizvoljne tačke M

$$\vec{a} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \times \vec{r}) =$$

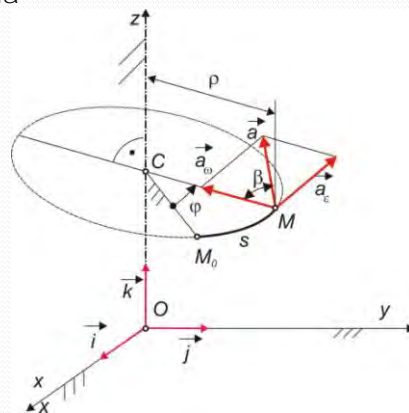
$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{V}$$

- Izvod brzine je zbir dva vektora:
 - Vektorski proizvod vektora ugaonog ubrzanja i vektora položaja
 - Vektorski proizvod vektora ugaone brzine i vektora brzine



$$\vec{a}_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$$

- Vektor kao direktna posledica ugaonog ubrzanja
- Pravac ovog vektora upravan je na **pravac vektora položaja i vektor ugaonog ubrzanja**
- **Kod obrtanja oko nepomične ose** vektor ugaone brzine i vektor ugaonog ubrzanja su kolinearni i poklapaju se sa osom obrtanja
- Ovaj vektor ubrzanja se naziva i obrtnim ubrzanjem



Obrtanje tela oko nepomične ose

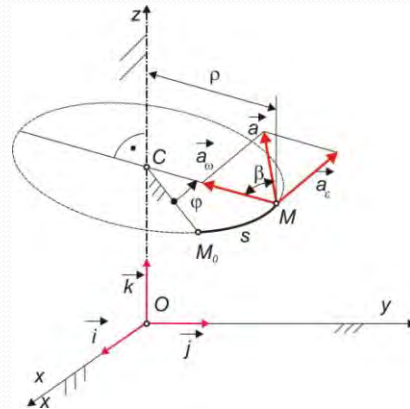
- ubrzanje tačke

- Vektor obrtnog ubrzanja po intenzitetu je jednak proizvodu ugaonog ubrzanja i najmanjeg rastojanja od tačke do ose obrtanja

$$a_{\varepsilon} = \varepsilon \cdot r \cdot \sin\alpha = \varepsilon \cdot \rho$$

- Intenzitet obrtnog ubrzanja jednak je proizvodu ugaonog ubrzanja, vektora položaja i sinusa zahvaćenog ugla

$$\vec{a}_{\varepsilon} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$$



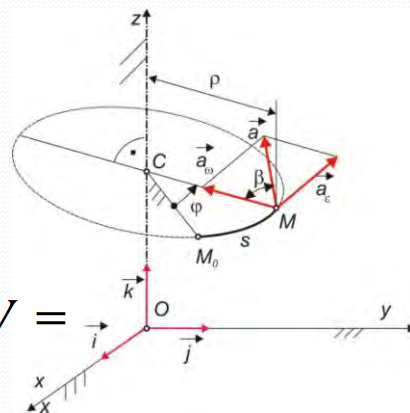
Obrtanje tela oko nepomične ose

- ubrzanje tačke

$$\vec{a}_{\omega} = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

- Druga komponenta je ubrzanje usmereno ka osi - aksipetalno ubrzanje
- Pravac vektora je upravan na vektor brzine i vektor ugaone brzine, odnosno leži na pravcu normale iz tačke M

$$a_{\omega} = \omega \cdot v \cdot \sin\alpha = \omega \cdot v = \omega^2 \cdot \rho$$



Obrtanje tela oko nepomične ose

- ubrzanje tačke

- Ubrzanje tačke tela je

$$\vec{a} = \vec{a}_\varepsilon + \vec{a}_\omega$$

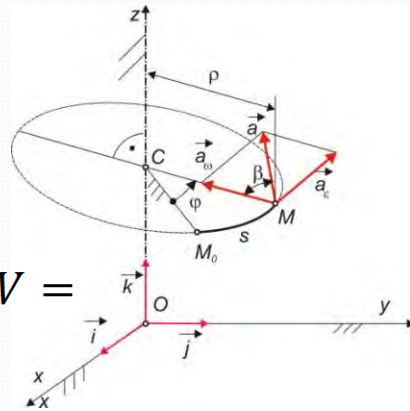
$$\vec{a} = \vec{a}_\varepsilon + \vec{a}_\omega$$

$$\vec{a}_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$$

$$a_\varepsilon = \varepsilon \cdot r \cdot \sin\alpha = \varepsilon \cdot \rho$$

$$\vec{a}_\omega = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$a_\omega = \omega \cdot V \cdot \sin\alpha = \omega \cdot V = \omega^2 \cdot \rho$$



Obrtanje tela oko nepomične ose

- Teorema:

Pri obrtanju krutog tela oko nepomične ose obrtno ubrzanje tačke jednako je tangencijalnom ubrzanju, dok je ubrzanje tačke usmereno ka osi jednako njenom normalnom ubrzanju

Obrtanje tela oko nepomične ose

- Dokaz teoreme

Pri obrtanju krutog tela oko nepomične ose svaka tačka opisuje luk čiji je centar na osi, a ravan mu je upravna na osu. Lučna koordinata definiše se kao luk između početnog M_0 i trenutnog M položaja tačke.

$$s = \rho \cdot \varphi$$

$$\rho = \text{const.}$$

Obrtanje tela oko nepomične ose

- Saglasno pokazanoj teoremi, brzina i ubrzanja tačke tela koje se obrće oko nepomične ose određuju se kao kod definisanog kretanja tačke po kružnoj putanji

$$s = \rho \cdot \varphi$$

$$\rho = \text{const.}$$

- Poluprečnik je jednak najmanjem rastojanju tačke čiju brzinu i ubrzanje određujemo obeležen sa ρ

$$\rho = R$$

Obrtanje tela oko nepomične ose

- Brzina proizvoljne tačke M

$$\vec{V}_T = \frac{ds}{dt} \cdot \vec{T} = \rho\omega \cdot \vec{T} = \rho\dot{\varphi} \cdot \vec{T}$$

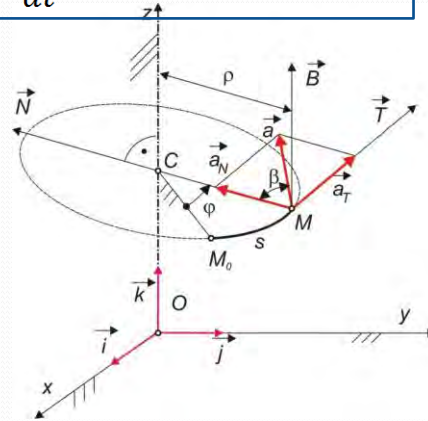
$$s = \rho \cdot \varphi$$

$$V = V_T = \dot{s} = \rho \cdot \dot{\varphi} = \rho\omega$$

$$\vec{V}_T = \frac{ds}{dt} \cdot \vec{T} = \rho\omega \cdot \vec{T} = \rho\dot{\varphi} \cdot \vec{T}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} = \omega$$

$$\rho = \text{const.}$$



Obrtanje tela oko nepomične ose

- Ubrzanje proizvoljne tačke M

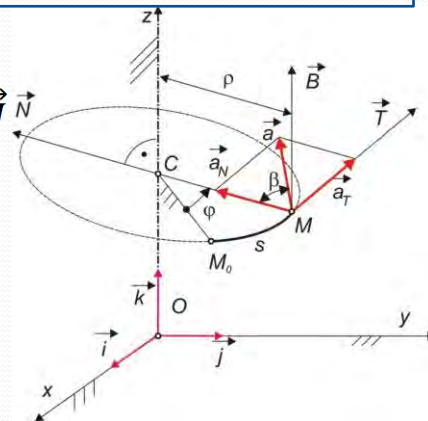
$$\vec{a} = \dot{s}\vec{T} + \frac{\dot{s}^2}{R_k} \cdot \vec{N}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_T \cdot \vec{T} + a_N \cdot \vec{N}$$

$$a_T = \frac{ds}{dt} = \dot{s} = \rho\dot{\omega} = \rho\ddot{\varphi} = \rho\varepsilon$$

$$a_N = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(\rho \cdot \dot{\varphi})^2}{\rho} = \rho\dot{\varphi}^2 = \rho\omega^2$$

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = \rho\sqrt{\dot{\varphi}^2 + \varphi^4} = \rho\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$



Obrtanje tela oko nepomične ose

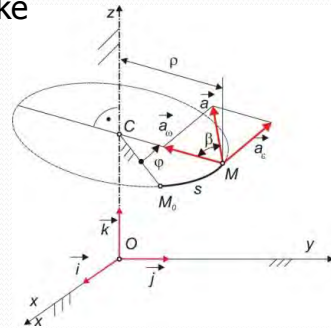
$$a_T = a_\varepsilon \quad a_N = a_\omega$$

- Komponente ubrzanja proizvoljne tačke M koja rotira oko nepomične ose
- Obrtno ubrzanje jednako je tangencijalnom ubrzanju

$$a_T = a_\varepsilon$$

- Ubrzanje usmereno ka osi jednako je normalnom ubrzanju

$$a_N = a_\omega$$



Obrtanje tela oko nepomične ose

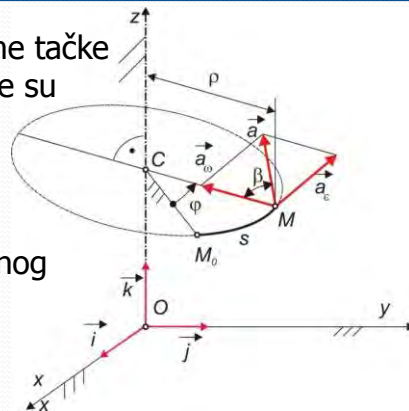
$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = \sqrt{a_\varepsilon^2 + a_\omega^2}$$

- Komponente ubrzanja proizvoljne tačke M koja rotira oko nepomične ose su uzajamno normalne, pa važi

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = \sqrt{a_\varepsilon^2 + a_\omega^2}$$

- Ugao između ubrzanja i normalnog ubrzanja

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a_T}{a_N} = \frac{a_\varepsilon}{a_\omega}$$



Rezime:

Kruto telo u zavisnosti od veza kojima je izloženo može izvoditi kretanja:

- Translatorno kretanje
- Obrtanje oko nepomične ose
- Obrtanje oko nepomične tačke
- Ravno kretanje

Rezime:

- Predmet današnjeg predavanja je obrtanje oko nepomične ose
- Ovaj vid kretanja ima veoma široku primenu u tehnici, skoro sve mašine sadrže delove koji se obrću oko odgovarajućih nepomičnih osa
- Kretanje tela se odvija oko dve tačke krutog tela
- Sve tačke koje se nalaze na pravoj AB krutog tela su nepomične
- Za potpuno određivanje položaja dovoljna je jedna koordinata - telo ima jedan stepen slobode

Rezime:

- Telo ima samo jedan stepen slobode
- **Položaj tela potpuno je određen jednom generalisanom koordinatom**
- Kao generalisana koordinata usvaja se ugao obrtanja

- Zakon kretanja je $\varphi = \varphi(t)$

- Vektor ugaone brzine $\vec{\omega} = \omega_z \vec{k} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{k} = \dot{\varphi} \vec{k}$

- Vektor ugaonog ubrzanja $\vec{\varepsilon}_z = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\omega_z}{dt} \vec{k} + \omega_z \frac{d\vec{k}}{dt} = \varepsilon_z \vec{k}$

Rezime:

- Brzine tačaka tela koje vrši obrtanje oko ose srazmerne su ugaonoj brzini i rastojanju tačke od ose

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad V = \omega r \sin\alpha = \omega \rho$$

- Ubrzanja tačaka tela koje vrši obrtanje oko ose imaju dve komponente ubrzanje kao posledicu ugaonog ubrzanja i ubrzanje usmereno ka osi rotacije kao posledicu ugaone brzine

$$\vec{a} = \vec{a}_\varepsilon + \vec{a}_\omega$$

$$a_\varepsilon = \varepsilon \cdot r \cdot \sin\alpha = \varepsilon \cdot \rho$$

$$a_\omega = \omega \cdot V \cdot \sin\alpha = \omega \cdot V = \omega^2 \cdot \rho$$

Rezime:

- Određivanje ubrzanja tačaka tela koje vrši obrtanje oko ose istovetno je kao kod određivanja istih kod kretanja tačke po kružnoj putanji

$$a_T = a_\varepsilon$$

$$a_N = a_\omega$$

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = \sqrt{a_\varepsilon^2 + a_\omega^2}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a_T}{a_N} = \frac{a_\varepsilon}{a_\omega}$$

Primer obrtanja oko ose

