Definicija složenog kretanja tačke
Brzina tačke pri složenom kretanju tačke
Ubrzanje pri složenom kretanju tačke. Koriolisova teorema

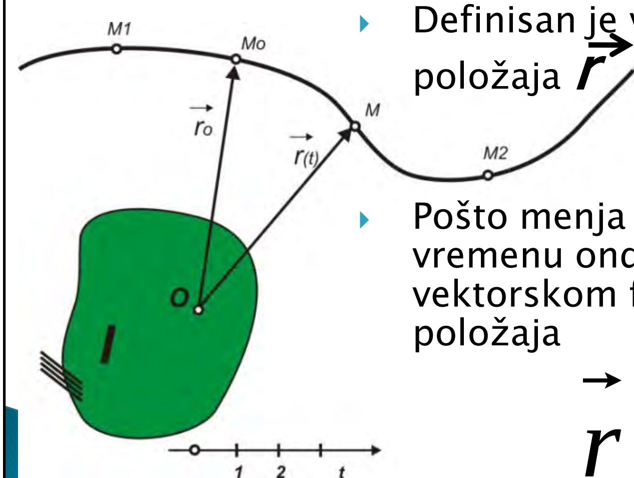
Složeno kretanje tačke

Definicija složenog kretanja tačke

- U dosadašnjim predavanjima i vežbama proučavane su kinematske karakteristike kretanja tačke posmatrane u odnosu na referentno nepokretno telo
- Vektor položaja definiše položaj pokretne tačke M

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

Položaj tačke M

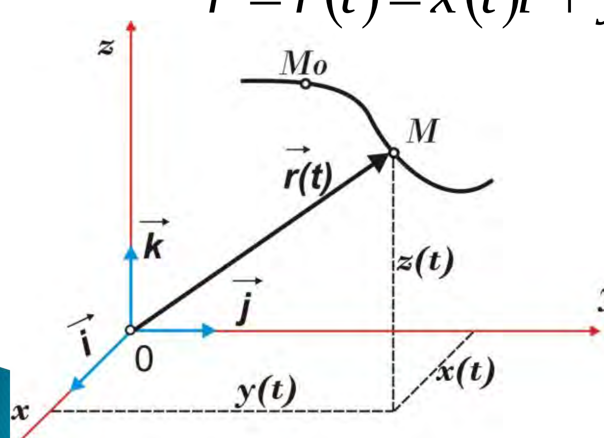


- Definisan je vektorom položaja $\vec{r}$
- Pošto menja svoj položaj u vremenu onda je definisan vektorskom funkcijom vektora položaja

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

Dekartov pravougli koordinatni sistem

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$



Definicija složenog kretanja tačke

- Vektor položaja prikazan kao vektorski zbir skalarnih funkcija

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

- Ove funkcije predstavljaju zakone kretanja tačke u odnosu na Dekartov pravougli koordinatni sistem vezan za referentno telo

Definicija složenog kretanja tačke

- Posmatrani Dekartov koordinatni sistem smatran je nepokretnim kao i referentno telo u odnosu na koje je praćeno kretanje tačke
- Treba naglasiti da u prirodi ne postoji nepokretno telo već se sva tela kreću
- Zavisno od izučavanog problema kada se izučava kretanje samo u odnosu na određeno telo to telo se u izučavanju može smatrati nepokretnim

Definicija složenog kretanja tačke

- Primer: kada se izučava kretanje automobila koordinatni sistem je vezan za Zemlju i Zemlju smatramo nepokretnom
- Postoje jasno definisani uslovi pod kojim se koordinatni sistem odnosno referentno telo mogu smatrati nepokretnim, obrađen u posebnom delu mehanike – dinamici

Definicija složenog kretanja tačke

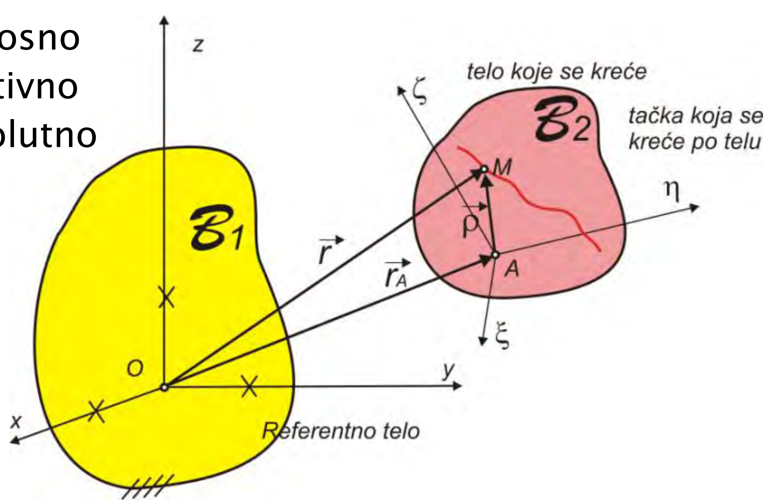
- Posmatra se jedno telo koje se kreće u odnosu na referentni koordinatni sistem
- Na tom telu uočimo drugi sistem vezan za telo i tačku koja se kreće po telu koje se kreće

Definicija složenog kretanja tačke

- Posmatrajmo kretanje autobusa na putu
- U autobusu putnik polazi od sedišta prema vratima autobusa
- Kretanje putnika se naziva relativnim kretanjem
- Kretanje autobusa prenosnim kretanjem
- Zbir ta dva kretanja je apsolutno kretanje

Definicija složenog kretanja tačke

- Prenosno
- Relativno
- Apsolutno



Definicija složenog kretanja tačke

- Tačka M se kreće po telu B_2 – telu nosaču
- Ovo kretanje tačke po telu koje se kreće naziva se relativno kretanje tačke u odnosu na telo nosač ili kraće

  RELATIVNO KRETANJE

Definicija složenog kretanja tačke

- ***RELATIVNO KRETANJE*** definisano je vektorom položaja $\vec{\rho}$ u pokretnom koordinatnom sistemu čvrsto vezanom za telo koje se kreće $A\xi\eta\zeta$

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}(t)$$

- Vektorskoj funkciji odgovaraju skalarne funkcije – zakoni kretanja

$$\xi = \xi(t), \ \eta = \eta(t), \zeta = \zeta(t),$$

Definicija složenog kretanja tačke

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}(t)$$

$$\xi = \xi(t), \;\; \eta = \eta(t), \;\; \zeta = \zeta(t),$$

- Eliminacijom vremena iz skalarnih jednačina dobijaju se jednačine površi u čijem preseku je linija putanje tačke M usled relativnog kretanja

$$f_1(\xi, \eta, \zeta) = 0 \qquad\qquad f_2(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

Definicija složenog kretanja tačke

- Telo B_2 se kreće u odnosu na referentno telo koje miruje pa nastaje promena položaja tačke usled ovog kretanja. Ono se naziva prenosno kretanje tačke u odnosu na telo koje miruje ili kraće ***PRENOSNO KRETANJE***

Definicija složenog kretanja tačke

- Telo B_2 se kreće u odnosu na referentno telo koje miruje pa nastaje promena položaja tačke usled ovog kretanja. Ono se naziva prenosno kretanje tačke u odnosu na telo koje miruje ili kraće **PRENOSNO KRETANJE**
- Ukupno kretanje nastalo sabiranjem relativnog i prenosnog kretanja naziva se **APSOLUTNO KRETANJE**

Definicija složenog kretanja tačke

- **APSOLUTNO KRETANJE** definisano je vektorom položaja $\vec{r}$ u pokretnom koordinatnom sistemu čvrsto vezanom za telo koje se kreće Axyz

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

- Vektorskoj funkciji odgovaraju skalarne funkcije – zakoni kretanja

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t)$$

Definicija složenog kretanja tačke

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t)$$

- Eliminacijom vremena iz skalarnih jednačina dobijaju se jednačine površi u čijem preseku je linija apsolutne putanje tačke M

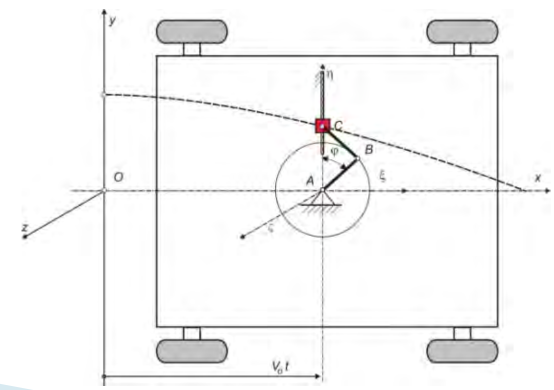
$$\varphi_1(\xi, \eta, \zeta) = 0 \qquad \varphi_2(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

Primer složenog kretanja tačke

- Kolica (platforma) se kreću translatorno pravolinijski duž x ose konstantnom brzinom V_0, odnosno po zakonu $x=V_0t$. Na platformi se nalazi klipni mehanizam ABC čije su poluge istih dužina, AB=BC=L. Poluga OA se okreće konstantnom ugaonom brzinom ω_0, odnosno po zakonu $\varphi=\omega_0 t$. Veličine V_0 i ω_0 su konstantne.

Primer složenog kretanja tačke

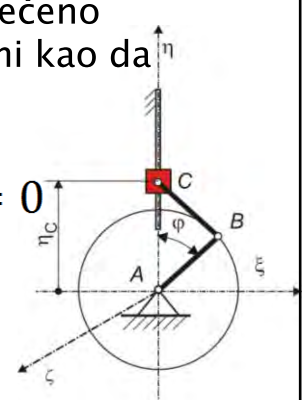
- Odrediti apsolutne i relativne putanje tačaka C i B, uzimajući u obzir koordinatni sistem čvrsto vezan za postolje.



Primer složenog kretanja tačke

- Ako se posmatra kretanje klipnog mehanizma na platformi, sistem A$\xi\eta\zeta$
- To je relativno kretanje tačaka za koje se traže zakoni kretanja (uslovno rečeno kretanje mehanizma na platformi kao da platforma miruje)
- Zakoni relativnog kretanja su

$$\xi_C = 0,\ \eta_C = 2L\cos\varphi,\ \zeta_C = 0$$



Primer složenog kretanja tačke

- Zakoni relativnog kretanja

$\xi_C = 0,\ \eta_C = 2Lcos\varphi,\ \zeta_C = 0$

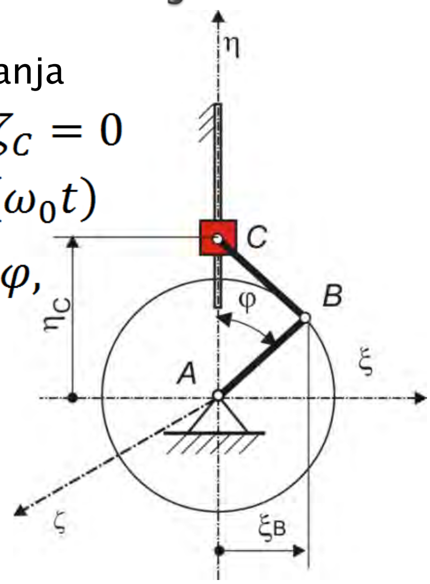
$\eta_C = 2Lcos\varphi = 2Lcos(\omega_0 t)$

$\xi_B = Lsin\varphi,\ \eta_B = Lcos\varphi,$

$\zeta_B = 0$

$\xi_B = Lsin(\omega_0 t)$

$\eta_B = Lcos(\omega_0 t)$



Primer složenog kretanja tačke

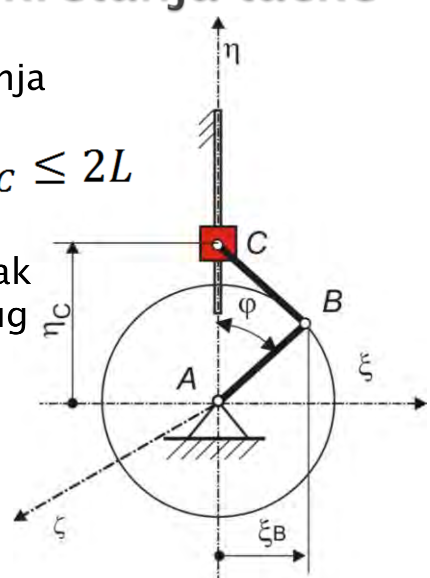
- Putanje relativnog kretanja

$\xi_C = 0, \zeta_C = 0, \quad 0 \leq \eta_C \leq 2L$

- Putanja tačke C je odsečak prave linije, a tačke B krug

$\zeta_B = 0$

$\xi_B^2 + \eta_B^2 = L^2$



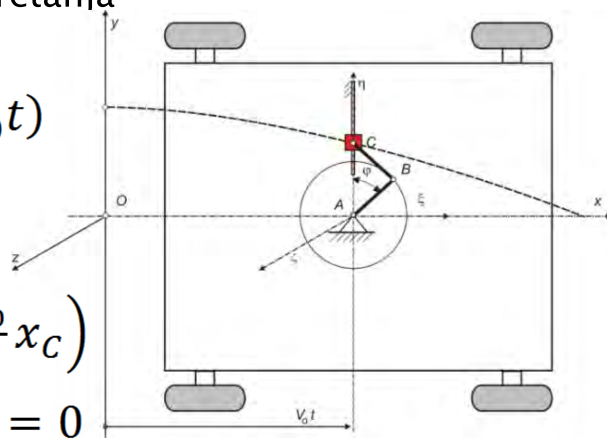
Primer složenog kretanja tačke

- Zakoni apsolutnog kretanja – zbir relativnog i prenosnog kretanja

$$x_C = V_0 t$$
$$y_C = 2L\cos(\omega_0 t)$$
$$z_C = 0$$

- putanja

$$y_C = 2L\cos\left(\frac{\omega_0}{V_0} x_C\right)$$
$$z_C = 0$$



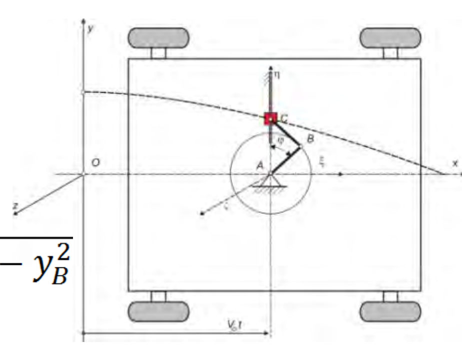
Primer složenog kretanja tačke

- Zakoni apsolutnog kretanja – zbir relativnog i prenosnog kretanja

$$x_B = V_0 t + L\sin(\omega_0 t)$$
$$y_B = L\cos(\omega_0 t)$$
$$z_B = 0$$

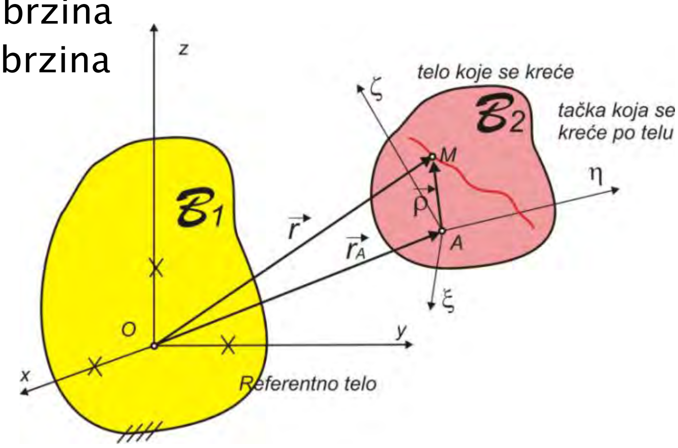
- putanja

$$x_B = \frac{V_0}{\omega_0} \arccos\left(\frac{y_B}{L}\right) + \sqrt{L^2 - y_B^2}$$
$$z_B = 0$$



Brzina tačke pri složenom kretanju

- Apsolutna brzina
- Prenosna brzina
- Relativna brzina



Brzina tačke pri složenom kretanju

- Teorema : pri složenom kretanju tačke apsolutna brzina jednaka je vektorskom zbiru prenosne i relativne brzine tačke

$$\vec{V} = \vec{V}_P + \vec{V}_R$$

Ubrzanje tačke pri složenom kretanju

- Koriolisova teorema: pri složenom kretanju tačke, apsolutno ubrzanje jednako je vektorskom zbiru prenosnog, relativnog i Koriolisovog ubrzanja tačke.

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_P + \vec{a}_R + \vec{a}_C}$$

Ubrzanje tačke pri složenom kretanju –Koriolisovo ubrzanje

- Koriolisovo ubrzanje uzima u obzir promenu prenosne brzine usled relativnog kretanja i promenu relativne brzine usled prenosnog kretanja

$$\boxed{\vec{a}_C = 2\vec{\omega}_P \times \vec{V}_R}$$

$$a_C = 2\omega_p \cdot V_r sin\alpha$$

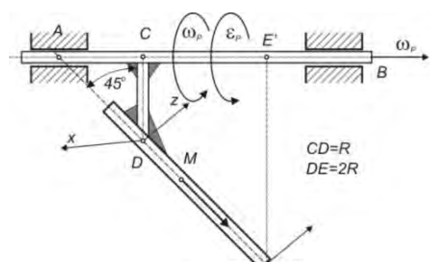
Koriolisovo ubrzanje

- Koriolisovo ubrzanje jednako je nuli:
  - Ako je $\omega_P = 0$, kada je prenosno kretanje translatorno
  - Kada je u posmatranom trenutku

$$\vec{V}_R = 0$$

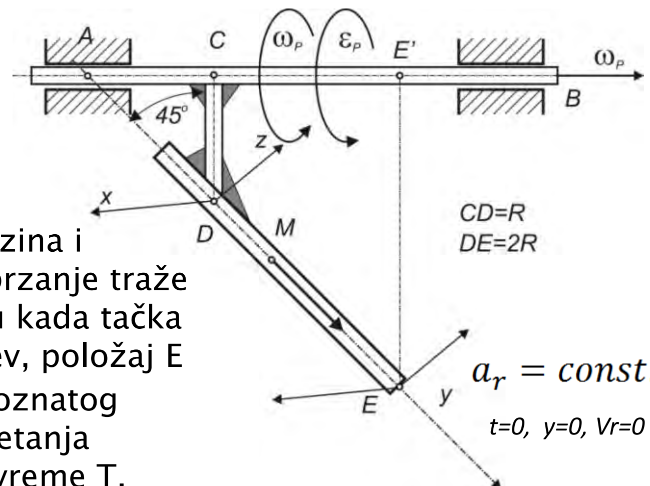
  - Kada su $\vec{\omega}_P$ i $\vec{V}_R$ kolinearni, paralelni vektori

Primer



- Cev DE, zavarena je za nosač CD, obrće se zajedno sa nosačem AB. Duž cevi se kreće pokretna tačka M konstantnim relativnim ubrzanjem a_R = const. U trenutku kada je počelo kretanje tačke M (iz stanja mirovanja) iz položaja D, počelo je obrtanje nosača i cevi iz mira. Ako je ugaono ubrzanje obrtanja oko ose ε=const, odrediti apsolutnu brzinu i apsolutno ubrzanje tačke M u trenutku kada tačka napušta cev.

Primer



- Apsolutna brzina i apsolutno ubrzanje traže se u trenutku kada tačka M napušta cev, položaj E
- Na osnovu poznatog relativnog kretanja određuje se vreme T, kada je tačka M u položaju E

$$a_r = const.$$

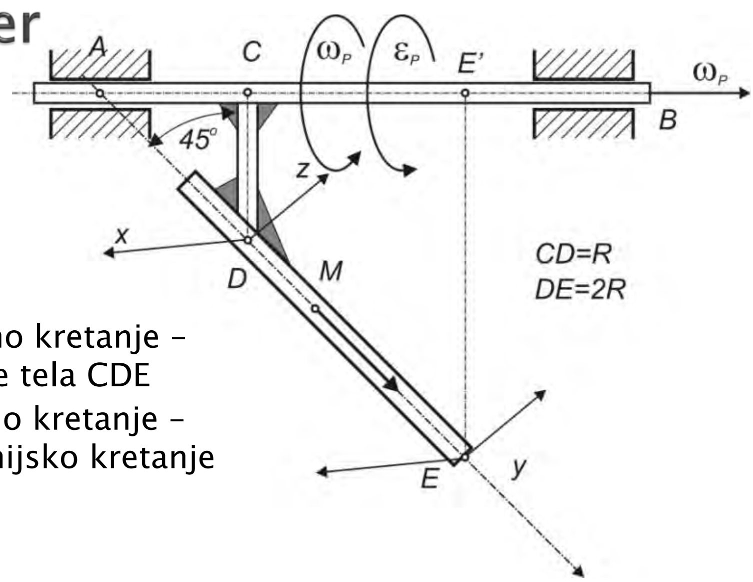
t=0, y=0, Vr=0

pravolinijsko jednakoubrzano kretanje

$$y = \frac{1}{2} a_r t^2$$

$$y = 2R, \rightarrow 2R = \frac{1}{2} a_r T^2 \rightarrow T = 2\sqrt{\frac{R}{a_r}}$$

Primer



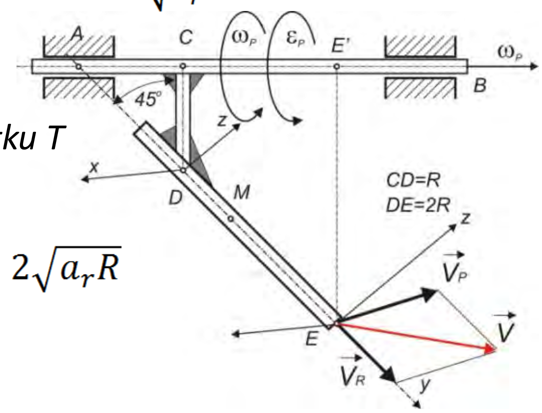
- Prenosno kretanje – obrtanje tela CDE
- Relativno kretanje – pravolinijsko kretanje tačke M

Primer

Na osnovu poznatog relativnog kretanja

$a_r = const.$ *t=0, y=0, Vr=0* $y = \frac{1}{2} a_r t^2$

$$y = 2R, \rightarrow 2R = \frac{1}{2} a_r T^2 \rightarrow T = 2\sqrt{\frac{R}{a_r}}$$



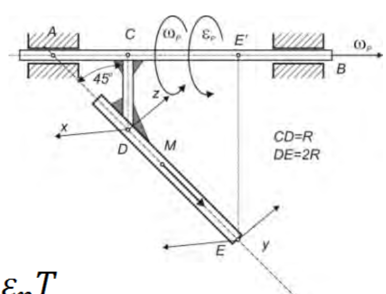
Relativna brzina u trenutku T

$$V_R = a_r t \rightarrow$$

$$V_R = a_r T = a_r 2\sqrt{\frac{R}{a_r}} = 2\sqrt{a_r R}$$

Primer

Na osnovu poznatog prenosnog kretanja koje je jednakoubrzano od 0, ε_P*=const*
U trenutku T prenosna brzina tačke E



$$\omega_P = \varepsilon_p t \rightarrow$$

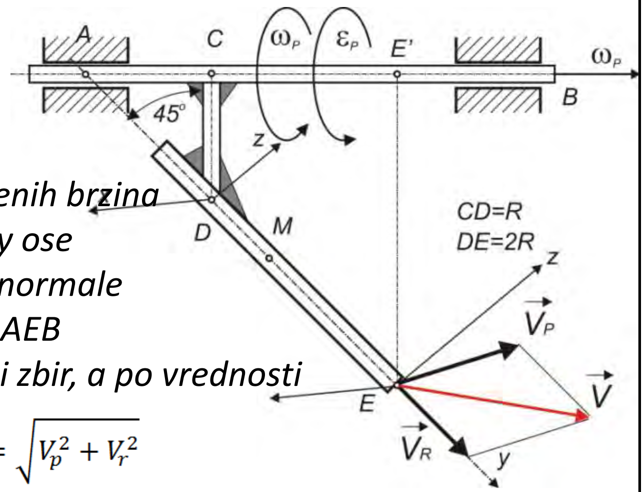
$$\omega_p = \varepsilon_p T = \varepsilon_p 2\sqrt{\frac{R}{a_r}} = 2\varepsilon_p\sqrt{\frac{R}{a_r}}$$

Prenosna brzina u trenutku T

$$V_p = \overline{EE'}\omega_p = R(1+\sqrt{2})\varepsilon_p T$$

$$V_p = 2R\left(1+\sqrt{2}\right)\varepsilon_p\sqrt{\frac{R}{a_r}}$$

Primer

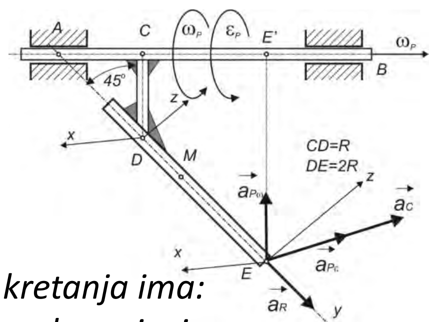


Na osnovu određenih brzina
Relativna pravac y ose
Prenosna pravac normale
Na EE' i na ravan AEB
brzina je vektorski zbir, a po vrednosti

$$V = \sqrt{V_p^2 + V_r^2}$$

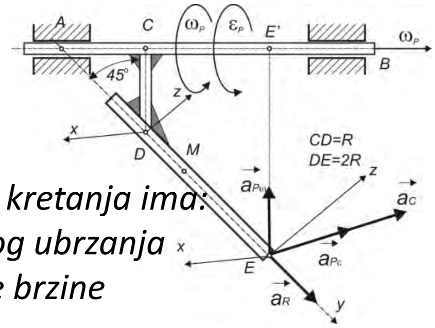
$$V = 2\sqrt{\frac{R}{a_r}\left[R^2\left(1+\sqrt{2}\right)^2\varepsilon^2 + a_r^2\right]}$$

Primer



Relativno ubrzanje je dato:
U pravcu y ose – cevi
Tačka cevi E usled prenosnog kretanja ima:
Ubrzanje usled ugaonog ubrzanja i
Ubrzanje usled ugaone brzine
Pored toga postoji i Koriolisovo ubzanje, pošto postoje prenosna ugaona brzina i relativna brzina

Primer



Tačka cevi E usled prenosnog kretanja ima:

Ubrzanje usled ugaonog ubrzanja

Ubrzanje usled ugaone brzine

$$a_{P\varepsilon} = \overline{EE'}\varepsilon = R(1+\sqrt{2})\varepsilon$$

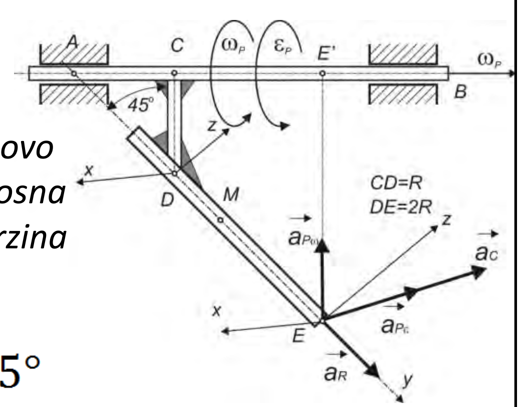
$$\vec{a}_{P\varepsilon} = -a_{P\varepsilon}\,\vec{\imath}$$

$$a_{P\omega} = \overline{EE'}\omega_p^2 = 4R^2(1+\sqrt{2})^2\frac{\varepsilon^2}{a_r}$$

$$\vec{a}_{P\omega} = -a_{P\omega}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\jmath} + -a_{P\omega}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{P\varepsilon} + \vec{a}_{P\omega}$$

Primer



Pored toga postoji i Koriolisovo ubzanje pošto postoje prenosna ugaona brzina i relativna brzina

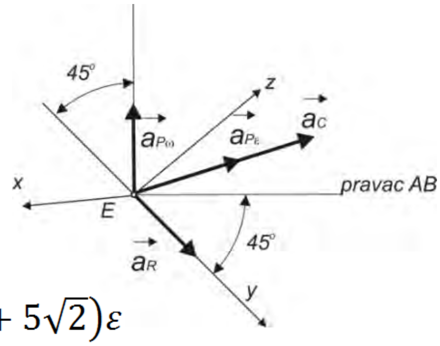
$$a_C = 2\omega_p \cdot V_r sin\alpha$$

$$a_C = 2\omega_p \cdot V_r sin45°$$

Koriolisovo ubrzanje normalno je na prenosnu ugaonu brzinu i na pravac relativne brzine, a ugao između njih je 45^o a vektori brzina leže u ravni yz pa je

$$\overrightarrow{a_C} = -4\sqrt{2}R\varepsilon\,\vec{\imath}$$

Primer



Ukupno ubrzanje je

$$\vec{a} = \vec{a}_P + \vec{a}_R + \vec{a}_C$$

$$a_x = -a_{P\varepsilon} - a_C = -R\left(1 + 5\sqrt{2}\right)\varepsilon$$

$$a_y = -a_{P\omega}\frac{\sqrt{2}}{2} + a_R = -\frac{\sqrt{2}}{2}R^2\left(1 + \sqrt{2}\right)\frac{\varepsilon^2}{R} + a_R$$

$$a_z = a_{P\omega}\frac{\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}R^2\left(1 + \sqrt{2}\right)\frac{\varepsilon^2}{a_R}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Rezime

- Složeno kretanje tačke predstavlja zbir prenosnog i relativnog kretanja tačke
- Brzina tačke jednaka je zbiru prenosne brzine i relativne brzine tačke
- Ubrzanje tačke jednako je zbiru prenosnog ubrzanja, relativnog ubrzanja i Koriolisovog ubrzanja
- Koriolisovo ubrzanje je posledica promene relativne brzine usled prenosnog kretanja i promene prenosne brzine usled postojanja relativnog kretanja

Rezime

- Kod rešavanja zadataka prvo rasčlaniti kretanja
- Rešiti relativno kretanje kao da nema prenosnog kretanja
- Rešiti prenosno kretanje kao da nema relativnog kretanja
- Objediniti oba kretanja
- Obratiti pažnju na postojanje Koriolisovog ubrzanja kada ima relativne brzine i kada ima prenosne ugaone brzine (kad je prenosno kretanje translacija nema Koriolisovog ubrzanja i ako je u posmatranom trenutku $V_R=0$)