Zadatak 1.

Date su jednačine kretanja tačke. Odrediti njene putanje.

$x = 20t^2 + 5$

$y = 15t^2 + 3$

Rešenje:

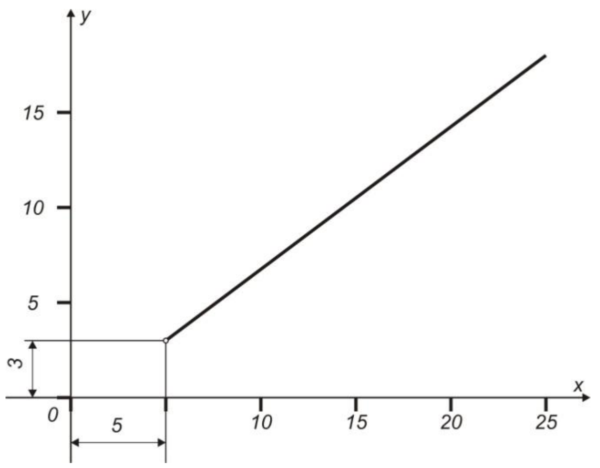
Date su parametarske jednačine kretanja tačke u funkciji parametra t. Putanja se definiše eliminacijom parametra iz jednačina kretanja po osama.

$x = 20t^2 + 5 \rightarrow t^2 = \frac{x-5}{20}$ zamenom u drugu

$y = 15t^2 + 3 = 15\frac{x-5}{20} + 3$

$20y = 15x - 75 + 60 = 15x - 15|:5$

$3x - 4y = 3$ jednačina poluprave od x=5, y=3



za t=0 x=5, y=3
za t=1 x=25, y=18

$y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$

Zadatak 2.

Date su jednačine kretanja tačke. Odrediti njene putanje.

$x = 4t - 2t^2$

$y = 3t - 1.5t^2$

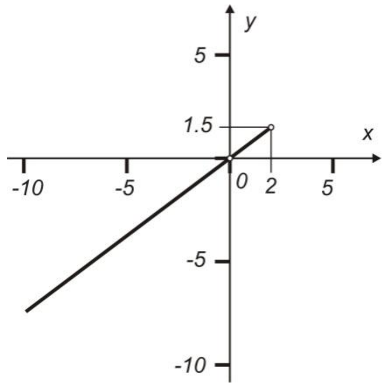
Rešenje:

$x = 4t - 2t^2$

$y = 3t - 1.5t^2$

$\frac{x}{2} = 2t - 1t^2$

$2y = 3(2t - t^2) = 3\frac{x}{2}$



$3x - 4y = 0$ jednačina poluprave od $x \leq 2,\ y \leq 1.5$

Za t=0 x=0,y=0; za t=1 x=2, y=1,5; za t=2 x=0,y=0; za t=3 x=-6,y=-4.5

Zadatak 3.

Date su jednačine kretanja tačke. Odrediti njene putanje.

$x = 5 + 3cost$

$y = 4\,sint$

jednačina elipse

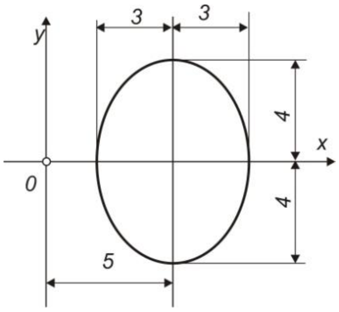
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

Rešenje:

$x = 5 + 3cost \rightarrow x - 5 = 3cost$

$y = 4\,sint$



$(x-5)^2 = 9cos^2t \rightarrow \frac{(x-5)^2}{9} = cos^2t$

$\rightarrow \frac{(x-5)^2}{9} = 1 - sin^2t$

$y^2 = 16\,sin^2t \rightarrow \frac{y^2}{16} = sin^2t$

$\frac{(x-5)^2}{9} + sin^2t = 1$

$\frac{(x-5)^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ jednačina elipse a=3, b=4, pomerena za 5 u poz. smeru x ose

Zadatak 4.

Date su jednačine kretanja tačke. Odrediti njene putanje.

$x = 5cost$

$y = 3 - 5sint$

jednačina kružnice

$(x-p)^2 + (y-q)^2 = R^2$

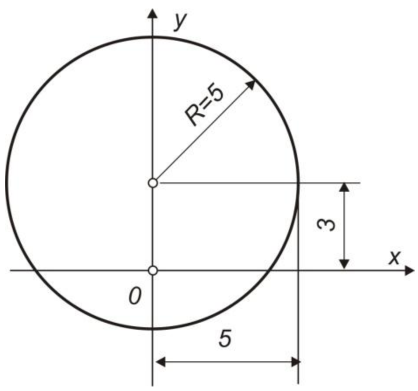
Rešenje:

$x = 5cost$

$y = 3 - 5sint$

$x^2 = 25cos^2t \rightarrow \frac{x^2}{25} = 1 - sin^2t$

$(y-3)^2 = 25sin^2t \rightarrow \frac{(y-3)^2}{25} = sin^2t$



$\frac{x^2}{25} + sin^2t = 1$

$\frac{x^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1$

$x^2 + (y-3)^2 = 25$ jednačina kružnice R=5, pomerena u smeru y ose za 3

Zadatak 5.

Date su jednačine kretanja tačke. Odrediti njene putanje.

$x = at^2$

$y = bt$

jednačina parabole $ay^2 + b^2x = 0$

Rešenje:

$x = at^2$

$y = bt \rightarrow t = \frac{y}{b}$

$x = at^2 = a\left(\frac{y}{b}\right)^2 \rightarrow ay^2 - b^2x = 0$

Zadatak 6.

Date su jednačine kretanja tačke. Odrediti jednačine putanje i zakone kretanja kretanja tačke na putanji računajući rastojanje od početnog položaja koji odgovara trenutku t=o.

$x = 3t^2$

$y = 4t^2$

Rešenje:

$x = 3t^2 \rightarrow t^2 = \frac{x}{3}$

$y = 4t^2 \rightarrow y = 4\frac{x}{3}$

$4x - 3y = 0$ jednačina poluptave

Da bi se odredio zakon puta u prirodnom koordinatnom sistemu

$x = 3t^2 \rightarrow \dot{x} = 6t \rightarrow \ddot{x} = 6$

$y = 4t^2 \rightarrow \dot{y} = 8t \rightarrow \ddot{y} = 8$

Brzina tačke

$\vec{V} = \dot{x} \cdot \vec{i} + \dot{y} \cdot \vec{j} = 6t \cdot \vec{i} + 8t \cdot \vec{j}$

$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{6^2t^2 + 8^2t^2} = \sqrt{36t^2 + 64t^2} = 10t$

Ubrzanje tačke

$\vec{a} = \ddot{x} \cdot \vec{i} + \ddot{y} \cdot \vec{j} = 6 \cdot \vec{i} + 8 \cdot \vec{j}$

$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$

Prirodna koordinata

$s = \int V dt = \int 10t dt = 5t^2 + C$ za t=0 C=0

$s = 5t^2$ zakon kretanja u prirodnim koordinatama

Brzina tačke

$\vec{V} = \dot{s} \cdot \vec{T} = 10t \cdot \vec{T}$

Ubrzanje tačke

$\vec{a} = a_T \cdot \vec{T} + a_N \cdot \vec{N} = \ddot{s} \cdot \vec{T} + \frac{\dot{s}^2}{R} \cdot \vec{N}$

$a_T = \ddot{s} = \frac{d(10t)}{dt} = 10$

$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} \rightarrow a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2} = \sqrt{10^2 - 10^2} = 0$

$\vec{a} = a_T \cdot \vec{T} + a_N \cdot \vec{N} = 10t \cdot \vec{T} + 0 \cdot \vec{N}$

Jasno je da je poluprečnik krivine beskonačan pošto je putanja poluprava pa samim tim i normalno ubrzanje jednako nuli

Zadatak 7.

Date su jednačine kretanja tačke. Odrediti jednačine putanje i zakone kretanja kretanja tačke na putanji računajući rastojanje od početnog položaja koji odgovara trenutku t=0.

$x = 3sint$

$y = 3cost$

Rešenje:

$x = 3sint \quad x^2 = 9sin^2t$

$y = 3cost \quad y^2 = 9cos^2t$

$x^2 + y^2 = 9(sin^2t + cos^2t)$

$x^2 + y^2 = 9$ jednačina kružnice R=3

Da bi se odredio zakon puta u prirodnom koordinatnom sistemu

$x = 3sint \qquad \dot{x} = 3cost \qquad \ddot{x} = -3sint$

$y = 3cost \qquad \dot{y} = -3sint \qquad \ddot{y} = -3cost$

Brzina tačke

$\vec{V} = \dot{x} \cdot \vec{i} + \dot{y} \cdot \vec{j} = 3cost \cdot \vec{i} - 3sint \cdot \vec{j}$

$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{(3cost)^2 + (-3sint)^2} = 3$

Ubrzanje tačke

$\vec{a} = \ddot{x} \cdot \vec{i} + \ddot{y} \cdot \vec{j} = -3sint \cdot \vec{i} - 3cost \cdot \vec{j}$

$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{(-3sint)^2 + (-3cost)^2} = 3$

Prirodna koordinate

$s = \int V dt = \int 3dt = 3t + C$ za t=0 C=0

$s = 3t$ zakon kretanja u prirodnim koordinatama

Brzina tačke

$\vec{V} = \dot{s} \cdot \vec{T} = 3 \cdot \vec{T}$

Ubrzanje tačke

$\vec{a} = a_T \cdot \vec{T} + a_N \cdot \vec{N} = \ddot{s} \cdot \vec{T} + \frac{\dot{s}^2}{R} \cdot \vec{N}$

$a_T^2 = \ddot{s} = \frac{d(3)}{dt} = 0$

Drugi način da se odredi tangencijalno ubrzanje

$|\overrightarrow{a_T}| = \frac{|\vec{V} \cdot \vec{a}|}{V} = \frac{\dot{x} \cdot \ddot{x} + \dot{y} \cdot \ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$

$|\overrightarrow{a_T}| = a_T = \frac{3cost \cdot (-3sint) + (-3sint) \cdot (-3cost)}{(3cost)^2 + (-3sint)^2} = \frac{0}{3} = 0$

$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} \rightarrow a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2} = \sqrt{3^2 - 0^2} = 3$

$\vec{a} = a_T \cdot \vec{T} + a_N \cdot \vec{N} = 0 \cdot \vec{T} + 3 \cdot \vec{N}$

Poluprečnik krivine

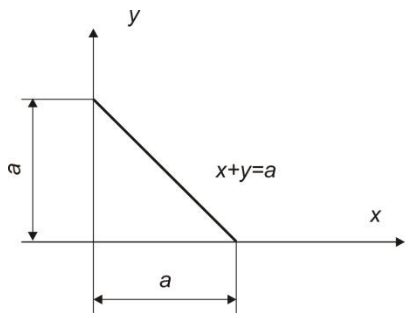
$R = \frac{V^2}{a_N} = \frac{9}{3} = 3$

Zadatak 8. ISPITNI januar 2010

Kretanje tačke dato je jednačinama $x = x(t)\ i\ y = y(t)$ gde je $[x, y\ u\ cm, a\ t\ u\ s]$. Odrediti poluprečnik krivine putanje tačke u trenutku T. (15 poena)

$x = acos^2t \qquad a = const$

$y = asin^2t \qquad T = 0$



Rešenje:

$x = acos^2t = a(1 - sin^2t) \rightarrow asin^2t = a - x$

$y = asin^2t \rightarrow y = a - x \rightarrow x + y = a$

$\boxed{x + y = a \text{ jednačina prave linije}}$

$t = 0 \rightarrow x = acos^2 0 = a, y = asin^2 0 = 0$

$t = \frac{\pi}{4} \rightarrow x = acos^2\frac{\pi}{4} = a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a}{2}, y = asin^2\frac{\pi}{4} = a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a}{2}$

$t = \frac{\pi}{2} \rightarrow x = acos^2 \frac{\pi}{2} = 0, y = asin^2 \frac{\pi}{2} = a$

$t = \frac{3\pi}{4} \rightarrow x = acos^2 \frac{3\pi}{4} = a\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a}{2}, y = asin^2 \frac{3\pi}{4} = a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a}{2}$

$t = \pi \rightarrow x = acos^2\pi = a, y = asin^2\pi = 0$

$t = \frac{5\pi}{4} \rightarrow x = acos^2 \frac{5\pi}{4} = a\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a}{2}, y = asin^2 \frac{5\pi}{4} = a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a}{2}$

Funkcija udvojenog ugla $sin2t = 2costsint$

$x = acos^2t \qquad \dot{x} = -a2costsint = -asin2t \qquad \ddot{x} = -2acos2t$

$y = asin^2t \qquad \dot{y} = a2costsint = asin2t \qquad \ddot{y} = 2acos2t$

brzina

$\vec{V} = \dot{x} \cdot \vec{i} + \dot{y} \cdot \vec{j} = -asin2t \cdot \vec{i} + asin2t \cdot \vec{j}$

$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{a^2sin^22t + a^2sin^22t} = a\sqrt{2}sin2t$

Ubrzanje

$\vec{a} = \ddot{x} \cdot \vec{i} + \ddot{y} \cdot \vec{j} = -2acos2t \cdot \vec{i} + 2acos2t \cdot \vec{j}$

$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{(-2acos2t)^2 + (2acos2t)^2} = a2\sqrt{2}cos2t$

Prirodna koordinate

$s = \int Vdt = \int a\sqrt{2}sin2t \, dt = a\sqrt{2} \int sin2t \, dt$

Integral se rešava uvođenjem smene

$2t = u$ pa je $2dt = du \rightarrow dt = \frac{du}{2}$

$s = a\sqrt{2} \int sinu \frac{1}{2} \, du = \frac{1}{2} a\sqrt{2} \int sinu \, du = -\frac{1}{2} a\sqrt{2}cosu + C$

$$s = -\frac{1}{2} a\sqrt{2}cosu + C$$

Za t=0 s=0 pa je i C=0

$s = -\frac{1}{2} a\sqrt{2}cos2t$

zakon kretanja u prirodnim koordinatama

Brzina tačke

$\vec{V} = \dot{s} \cdot \vec{T}$

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt} = -\frac{a\sqrt{2}}{2}(-2sin2t) = a\sqrt{2}sin2t$$

$$\vec{V} = \dot{s} \cdot \vec{T} = a\sqrt{2}sin2t \cdot \vec{T}$$

Ubrzanje tačke

$$\vec{a} = a_T \cdot \vec{T} + a_N \cdot \vec{N} = \ddot{s} \cdot \vec{T} + \frac{\dot{s}^2}{R} \cdot \vec{N}$$

$$a_T^2 = \ddot{s} = \frac{d\left(a\sqrt{2}sin\,2t\right)}{dt} = a\sqrt{2}\frac{d(sin\,2t)}{dt} = a\sqrt{2} \cdot 2cos2t = a2\sqrt{2}cos2t$$

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} \rightarrow a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2} = \sqrt{\left(a2\sqrt{2}cos2t\right)^2 - \left(a2\sqrt{2}cos2t\right)^2} = 0$$

$$R = \frac{V^2}{a_N} = \frac{2a^2\,sin^2 2t}{0} = \infty$$

Drugi način da se odredi tangencijalno ubrzanje za koji nije potrebna prirodna koordinata s

$$|\overrightarrow{a_T}| = \frac{|\vec{V} \cdot \vec{a}|}{V} = \frac{\dot{x} \cdot \ddot{x} + \dot{y} \cdot \ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\, t$$

$$|\overrightarrow{a_T}| = a_T = \frac{(-asin\,2t) \cdot (-2acos\,2t) + (asin\,2t) \cdot (2acos\,2t)}{\sqrt{(-asin\,2t)^2 + (asin\,2t)^2}}$$

$$a_T = \frac{4a^2 sin\,2t\;cos\,2t}{\sqrt{2}\;asin\,2t} = a2\sqrt{2}cos2t$$

$$a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2} = \sqrt{\left(a2\sqrt{2}cos2t\right)^2 - \left(a2\sqrt{2}cos2t\right)^2} = 0$$

Poluprečnik krivine

$$R = \frac{V^2}{a_N} = \frac{2a^2\,sin^2 2t}{0} = \infty$$