**Zadatak 1.**

Malj za pobijanje šipova pada sa visine od 2,5 m. Da bi podigli malj na tu visinu potrebno je tri puta više vremena nego za pad.
Koliko puta udari malj o šip u minutu, kada se pretpostavi da on pada slobodno sa ubrzanjem g=9.81m/s$^2$.

**Rešenje:**

Za vreme slobodnog pada malj ima konstantno ubrzanje g =9.81 m/s$^2$ pa je zakon promene brzine, kako je početna brzina jednaka nuli

$$V = \int g\,dt = g\int dt = gt + c_1 = gt$$

kako je početna brzina jednaka nuli $C_1 = 0$

$$V = gt$$

Pređeni put odnosno visina pada je

$$s = \int V dt = \int gtdt = g\int tdt = g\frac{t^2}{2} + c_2$$

kako je početni put jednak nuli $C_2 = 0$

$s = g\frac{t^2}{2}$ odavde je

$$t_1 = \sqrt{\frac{2\cdot s}{g}} = \sqrt{\frac{2\cdot 2.5}{9.81}} = \sqrt{0.50968} = 0.7139\ s$$

Za podizanje potrebno je tri puta više vremena nego za pad, pa je vreme za jedan udarac

$$t_2 = 4\cdot t_1 = 4\cdot 0.7139 = 2.855\ s$$

Pošto je traženi broj udaraca u minuti, koji ima 60 s broj udaraca je

$N = \frac{60}{2.855} = 21$ udarac u minuti

**Zadatak 2.**

Voz koji se kreće početnom brzinom od 54 km/h, pređe 600 m za prvih 30 sekundi.

Odrediti brzinu i totalno ubrzanje voza na kraju tridesetog sekunda ako se pretpostavi da se voz kreće jednakoubrzano u krivini poluprečnika R=1km.

**Rešenje:**

Promena brzine, kako je početna brzina 54 km/h, a kretanje jednako ubrzano je

$$V_0 = 54\frac{km}{h} = 54\frac{1000}{3600}\frac{m}{s} = 15m/s$$

$$a_T = \ddot{s} = const.$$

$$V = \int \ddot{s}\, dt = \int a_T\, dt = a_T \int dt = a_T t + c_1$$

kako je početna brzina jednaka $C_1 = V_0$

$$V = \dot{s} = a_T t + V_0$$

Pređeni put, kako je početna brzina 54 km/h, a kretanje jednako ubrzano je

$$s = \int \dot{s}\, dt = \int (a_T t + V_0)\, dt = a_T \int t dt + V_0 \int dt + c_2$$

kako je početni put s=0 $C_2 = 0$

$$s = a_T \frac{t^2}{2} + V_0 t$$

Kako voz za 30 s pređe 600 m to je t1=30, s1=600

$$a_T = \frac{2(s_1 - V_0 t_1)}{t_1^2} = \frac{2(600 - 15\cdot 30)}{30^2} = \frac{2(600-450)}{30^2} = \frac{300}{900} = \frac{1}{3}\ m/s^2$$

Brzina voza na kraju 30 s

$$V = \dot{s} = a_T t + V_0 = \frac{1}{3}\ 30 + 15 = 25\, m/s$$

Normalno ubrzanje na kraju 30 s u krivini R=1km=1000 m

$$a_N = \frac{V^2}{R} = \frac{25^2}{1000} = \frac{625}{1000} = 0.625\, m/s^2$$

Totalno ili ukupno ubrzanje na kraju 30 s u krivini R=1km=1000 m

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = \sqrt{0.333^2 + 0.625^2} = \sqrt{0.5015} = 0.708\, m/s^2$$

**Zadatak 3.**

Po luku poluprečnika R=20 cm kreće se tačka. Zakon kretanja tačke po putanji je s=20sin($\pi$t) gde je t u sekundama a s u centimetrima.

Odrediti intenzitet i smer brzine i tangencijalno, normalno i totalno ubrzanje u $t_1$=5s.

## Rešenje:

Zakon promene puta je dat pa je brzina

$$s = 20\sin(\pi t)\ \ cm$$

$$V = \dot{s} = \frac{d(20\sin(\pi t))}{dt} = 20\pi cos(\pi t)\ \ cm/s$$

Tangencijalno ubrzanje

$$a_T = \ddot{s} = \frac{d\big(20\pi cos\,(\pi t)\big)}{dt} = -20\pi^2 sin(\pi t)\ \ \frac{cm}{s^2}$$

Normalno ubrzanje

$$a_N = \frac{\dot{s}^2}{R} = \frac{\left(20\pi cos\,(\pi t)\right)^2}{R} = \frac{20^2\pi^2 cos^2(\pi t)}{R}$$

Za vreme $t_1$=5s :

$$s = 20\sin(\pi t) = 20 sin 5\pi = 20 \cdot 0 = 0\ cm$$

brzina je

$V = \dot{s} = 20\pi cos(5\pi) = 20\pi \cdot (-1) = -20\pi\ \ cm/s$ brzina je u suprotnom smeru od kretanja

Tangencijalno ubrzanje

$$a_T = -20\pi^2 sin(5\pi) = -20 \cdot 0 = 0\ \frac{cm}{s^2}$$

Normalno ubrzanje

$$a_N = \frac{\dot{s}^2}{R} = \frac{(20\pi)^2}{20} = 20\pi^2\,\frac{cm}{s^2}$$

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = \sqrt{0 + (20\pi^2)^2} = 20\pi^2\ \ cm/s^2$$

**Zadatak 4.**

Kretanje tačke dato je jednačinama:

$$x = 20t^2 + 5$$

$$y = 15t^2 - 3$$

Gde je t vreme u sekundama a koordinate x i y u cm.

Odrediti intenzitet i smer brzine i ubrzanja tačke u u trenucima t=2 s i t=3s.

## Rešenje:

Brzina tačke

$\dot{x} = 40t$ cm/s

$\dot{y} = 30t$ cm/s

$$\vec{V} = \dot{x} \cdot \vec{i} + \dot{y} \cdot \vec{j} = 40t \cdot \vec{i} + 30t \cdot \vec{j}$$

$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{1600t^2 + 900t^2} = 50t$ cm/s

$$cos\alpha_V = \frac{\dot{x}}{V} = \frac{40t}{50t} = 0.8$$

$\ddot{x} = 40$ cm/s$^2$

$\ddot{y} = 30$ cm/s$^2$

$$\vec{a} = \ddot{x} \cdot \vec{i} + \ddot{y} \cdot \vec{j} = 40 \cdot \vec{i} + 30 \cdot \vec{j}$$

$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{1600 + 900} = 50$ cm/s$^2$

$cos\alpha_a = \frac{\ddot{x}}{a} = \frac{40}{50} = 0.8$

Za t=2s V=100 cm/s i a=50 cm/s$^2$

Za t=3s V=150 cm/s i a=50 cm/s$^2$

$x = 20t^2 + 5 \to t^2 = \frac{x-5}{20}$

$y = 15t^2 - 3 = 15\frac{x-5}{20} - 3$

$20y = 15x - 60$

$y = \frac{3}{4}x - 3$

jednačina prave linije pa kako je a=const to je pravolinijsko jednakoubrzano kretanje, nema normalnog ubrzanja jer je R beskonačno

Može se odrediti zakon kretanja u prirodnim koordinatama

$V = \int \ddot{s}\, dt = \int a_T\, dt = a_T \int dt = a_T t + c_1$

Kako je za t=0s V=0 cm/s i a=50 cm/s$^2$=const

$V = \dot{s} = \ddot{s}t + 0 = a_T t = 50t$ cm/s

$s = \int \dot{s}\, dt = \int a_T\, dt = a_T \int tdt + c_2 = a_T \frac{t^2}{2} = 50\frac{t^2}{2}$ cm

**Zadatak 5.**

Pri polasku iz stanice povećava se brzina datog voza ravnomerno, tri minuta po polasku voz se kreće brzinom od v=72 km/h. Kolosek se nalazi u krivini R=800 m.

Odrediti intenzitet tangencijalnog, normalnog i totalnog ubrzanja voza dva minuta nakon polaska iz stanice.

## Rešenje:

Kretanje je ravnomerno ubrzano što znači da je tangencijalno ubrzanje konstantno, pa je zakon promene brzine

$a_T = \ddot{s} = const.$

$V = \int \ddot{s}\, dt = \int a_T\, dt = a_T \int dt = a_T t + c_1$ kako voz polazi iz stanice

$V_0 = 0 = c_1$

$V = \dot{s} = \ddot{s}t + 0 = a_T t$

Zakon promene puta prirodne koordinate, a kako voz polazi $s_0$=0

$s = \int V\, dt = \int \dot{s}\, dt = \int a_T\, tdt = a_T \int tdt + c_2 = a_T \frac{t^2}{2} + 0$

$s_0 = 0 = c_2$

Nakon tri minuta voz se kreće

$V_1 = 72\frac{km}{h} = 72\frac{1000}{3600}\frac{m}{s} = 20m/s$

$t_1 = 3min = 3 \cdot 60s = 180s$

$V_1 = a_T t_1 \;\rightarrow\; a_T = \frac{V_1}{t_1} = \frac{20}{180} = \frac{1}{9}\ m/s^2$

$V = \frac{1}{9}t\ m/s$

$a_T = \frac{1}{9}\ m/s^2$

$a_N = \frac{\dot{s}^2}{R} = \frac{\left(\frac{1}{9}t\right)^2}{800} = \frac{t^2}{81 \cdot 800}\quad \frac{m}{s^2}$

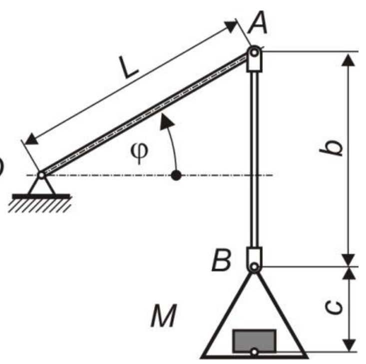
Nakon $t_2$=2 min =120s

$V_2 = \frac{1}{9}t_2 = \frac{1}{9}120 = \frac{40}{3}\ m/s$

$a_T = \frac{1}{9}\ m/s^2$

$a_{N2} = \frac{\dot{s}^2}{R} = \frac{(V_2)^2}{R} = \frac{40 \cdot 40}{9 \cdot 800} = \frac{2}{9}\quad \frac{m}{s^2}$

$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{9}\right)^2 + \left(\frac{2}{9}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{9} = 0.24845\ m/s^2$




**Zadatak 6.**

Poluga $\overline{OA}$ =L obrće se oko nepomične horizontalne ose, koja prolazi kroz tačku O a upravna je na ravan crteža. Za polugu $\overline{OA}$ u zglobu A vezana je poluga $\overline{AB}$ =b na čijem je kraju vezana platforma koja nosi teret M. Odrediti brzinu i ubrzanje tereta M ako je brzina tačke A konstantna intenziteta $V_0$ a pravac ABM ostaje sve vreme kretanja vertikalan. Odrediti jednačinu putanje tačke M. Rastojanje $\overline{BM}$=c.

## Rešenje:

Sve vreme kretanja poluga AB i pravac ABM su vertikalni pa je kretanje translatorno.
Putanja, brzine, ubrzanja tačaka A, B, M su jednake.

$V_0 = const.$

$V_A = V_0 = L\omega_0 = L\dot{\varphi} \rightarrow \dot{\varphi} = \omega_0 = \frac{V_0}{L}$

$\varphi = \int \dot{\varphi}\, dt = \int \omega_0\, dt = \int \frac{V_0}{L} dt = \frac{V_0}{L} \int dt + c_1$

$\varphi = \frac{V_0}{L} t + \varphi_0 = \frac{V_0}{L} t$

*Pošto je* $\varphi_0 = 0$

$\varphi = \frac{V_0}{L} t = kt$ *gde je* $k = \frac{V_0}{L} = const.$

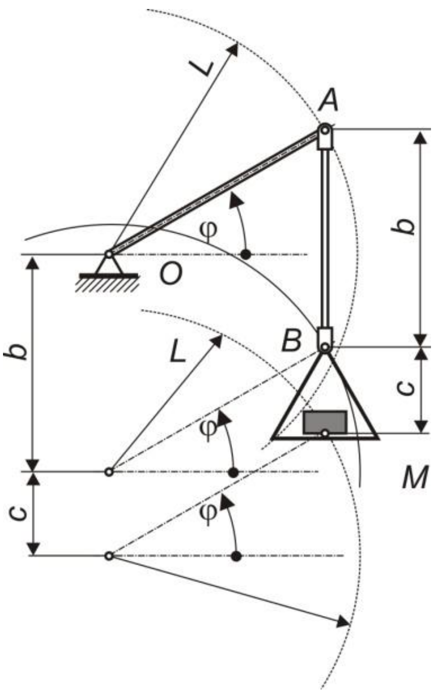
Kako je $\dot{\varphi} = \omega_0 = \frac{V_0}{L} = const$ *ubrzanja tačke A su*

$a_{TA} = 0\, m/s^2$

$a_{NA} = \frac{(V_A)^2}{L} = \frac{V_0^2}{L} = L{\omega_0}^2 \;\; \frac{m}{s^2}$

$a_A = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = \sqrt{0^2 + (L{\omega_0}^2)^2} = L{\omega_0}^2 \;\; m/s^2$

Može se pokazati da je putanja tačke A kružnica poluprečnika L




$x_A = L\, cos\varphi = Lcos\, kt$

$y_A = Lsin\varphi = Lsin\, kt$

*Kvadriranjem i sabiranjem jednačina dobija se*

${x_A}^2 + {y_A}^2 = L^2$ *jednačina kružnice sa poluprečnikom L*

*Tako se pokazuje za tačke B i M da su im putanje jednake*

$x_B = L\, cos\varphi = Lcos\, kt$

$y_B = Lsin\varphi - b = Lsin\, kt$

$y_B + b = Lsin\varphi = Lsin\, kt$

*Kvadriranjem i sabiranjem jednačina dobija se*

${x_B}^2 + [y_B + b]^2 = L^2\,(sin^2\, kt + cos^2\, kt)$

${x_B}^2 + [y_B + b]^2 = L^2$ *kružnica poluprečnika L pomerena za b po y osi*

*Brzina tačke B*

$\dot{x}_B = -L\, ksinkt$

$\dot{y}_B = Lkcoskt$

$V_B = \sqrt{\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2} = \sqrt{L^2k^2(sin^2\, kt + cos^2\, kt)^2} = Lk = L\frac{V_0}{L} = V_0\, m/s$

*Ubrzanje tačke M*

$\ddot{x}_B = -Lk^2 coskt$

$\dot{y}_B = -L\, k^2 sinkt$

$$a_B = \sqrt{\ddot{x}_B^2 + \ddot{y}_B^2} = \sqrt{L^2 k^4 (sin^2\, kt + cos^2\, kt)^2} = Lk^2 = L\left(\frac{V_0}{L}\right)^2 = \frac{{V_0}^2}{L}\ m/s^2$$

*Takođe isto je i za tačku M*

$x_M = L\, cos\varphi = Lcos\, kt$

$y_M = Lsin\varphi - (b + c) = Lsin\, kt$

$y_M + (b + c) = Lsin\varphi = Lsin\, kt$

*Kvadriranjem i sabiranjem jednačina dobija se*

${x_M}^2 + [y_M + (b + c)]^2 = L^2\, (sin^2\, kt + cos^2\, kt)$

${x_M}^2 + [y_M + (b + c)]^2 = L^2$ *kružnica poluprečnika L pomerena za b+c po y osi*

*Brzina tačke M*

$\dot{x}_M = -L\, ksinkt$

$\dot{y}_M = Lkcoskt$

$$V_M = \sqrt{\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2} = \sqrt{L^2 k^2 (sin^2\, kt + cos^2\, kt)^2} = Lk = L\frac{V_0}{L} = V_0\ m/s$$

*Ubrzanje tačke M*

$\ddot{x}_M = -Lk^2 coskt$

$\dot{y}_M = -L\, k^2 sinkt$

$$a_M = \sqrt{\ddot{x}_M^2 + \ddot{y}_M^2} = \sqrt{L^2 k^4 (sin^2\, kt + cos^2\, kt)^2} = Lk^2 = L\left(\frac{V_0}{L}\right)^2 = \frac{{V_0}^2}{L}\ m/s^2$$