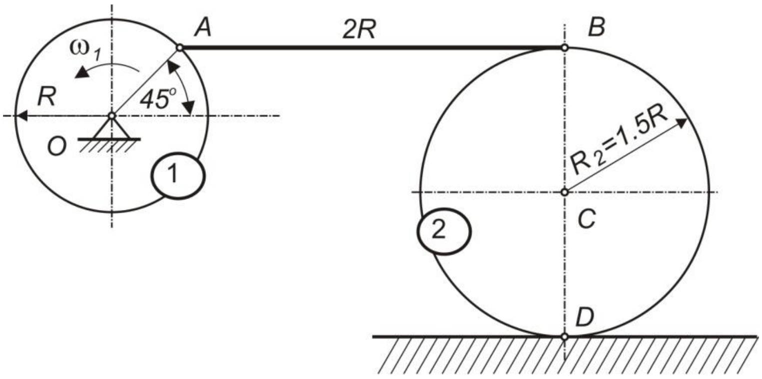
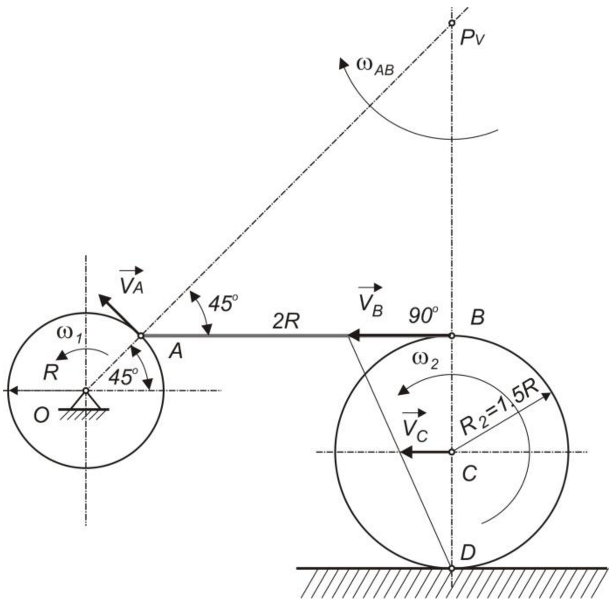
Zadatak 11.

Mehanizam se sastoji od diska 1 poluprečnika R, koji se obrće konstantnom ugaonom brzinom ω_1 oko centra O, zatim poluge AB dužine 2R i diska 2 koji se kortlja, prečnika 3R, odnosno poluprečnika 1.5R. Tačke A i B su zglobno vezane. Navedene komponente leže u istoj vertikalnoj ravni.
Odrediti brzine i ubrzanja tačaka A i B kada su međusobni položaji kao na slici.



Rešenje:



Kako se disk okreće ugaonom brzinom ω_1, brzina tačke A diska

$$V_A = \overline{OA} \cdot \omega_1 = R \cdot \omega_1$$

Kako je tačka A i tačka poluge AB, koja se okreće sa ω_{AB} oko pola P_V jasno je da je položaj pola kao na slici, u preseku normale na V_A, u tački A i normale na V_B koja mora biti horizontalna u datom trenutku u tački B:

Trougao ABP_V je pravougli jednakokraki trougao $45^o 90^o 45^o$ pa su

$$\overline{BP_V} = 2R = \overline{AB} = 2R$$

$$\overline{AP_V} = \sqrt{4R^2 + 4R^2} = 2R\sqrt{2}$$

Brzina tačke A poluge je ista sa brzinom tačke A diska

$$V_A = \overline{AP_V} \cdot \omega_{BA} = 2R\sqrt{2} \cdot \omega_{BA}$$

$$\omega_{BA} = \frac{V_A}{2R\sqrt{2}} = \frac{R}{2R\sqrt{2}} \cdot \omega_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \omega_1 \qquad \boxed{\omega_{BA} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \omega_1}$$

Brzina tačke B poluge je

$$V_B = \overline{BP_B} \cdot \omega_{BA} = 2R \cdot \omega_{BA} = 2R \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \omega_1 = R\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \omega_1$$

Brzina tačke B poluge je ista sa brzinom tačke B diska

$$V_B = 2R_2 \cdot \omega_2 = 3R \cdot \omega_2$$

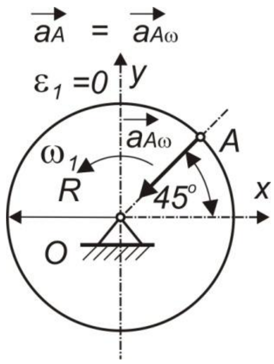
Ugaona brzina diska koji se kotrlja po horizontalnoj podlozi ω_2 je

$$\omega_2 = \frac{V_B}{3R} = \frac{1}{3R}R\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \omega_1 = \frac{\sqrt{2}}{6} \cdot \omega_1 \qquad \boxed{\omega_2 = \frac{\sqrt{2}}{6} \cdot \omega_1}$$

Ugaona bzina diska koji se kotrlja po horizontalnoj podlozi ω_2 brzina tačke C

$$V_C = R_2 \cdot \omega_2 = \frac{R\sqrt{2}}{6} \cdot \omega_1$$

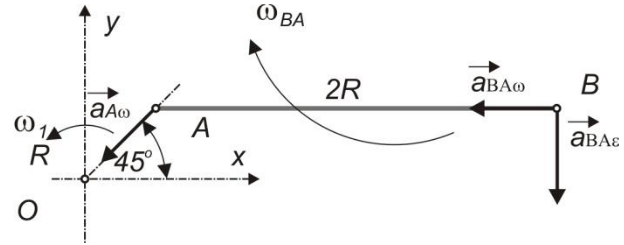
Ugaono ubrzanje tačke diska A je samo ubrzanje usled ugaone brzine jer je brzina tačke A konstantna



$$\vec{a_A} = a_{A\varepsilon}\vec{T} + a_{A\omega}\vec{N} = 0 \cdot \vec{T} + a_{A\omega}\vec{N} = R \cdot \omega_1^2\vec{N}$$

$$\vec{a_A} = -\frac{\sqrt{2}}{2}a_{A\omega}\vec{\imath} - \frac{\sqrt{2}}{2}a_{A\omega}\vec{\jmath} = -\frac{\sqrt{2}}{2}R\omega_1^2\vec{\imath} - \frac{\sqrt{2}}{2}R\omega_1^2\vec{\jmath}$$

Ugaono ubrzanje tačke poluge A je jednako ubrzanju tačke A diska, a ubrzanje tačke B poluge jednako je vektorskom zbiru



$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA\varepsilon} + \vec{a}_{BA\omega}$$

$$a_{BA\varepsilon} = 2R \cdot \varepsilon_{BA}$$

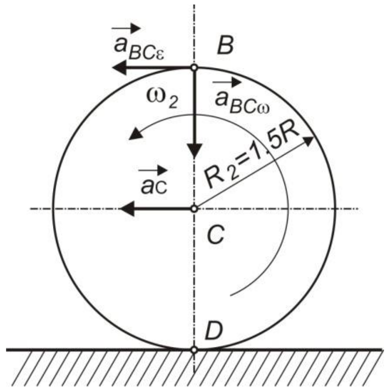
$$a_{BA\omega} = 2R \cdot (\omega_{BA})^2 = 2R\left(\frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \omega_1\right)^2 = \frac{R}{4} \cdot {\omega_1}^2$$

Ubrzanje tačke B sa druge strane kao elementa diska 2 jednako je vektorskom zbiru

$$\vec{a}_B = \vec{a}_c + \vec{a}_{BC\varepsilon} + \vec{a}_{BC\omega}$$

Ubrzanje tačke C mora biti horizontalno jer je kretanje centra diska pravolinijsko

$$\vec{a}_c = -a_C\,\vec{\imath} = -R_2\frac{d\omega_2}{dt}\,\vec{\imath} = -\frac{3}{2}R \cdot \varepsilon_2\,\vec{\imath}$$



$$\vec{a}_{BC\varepsilon} = -\overline{BC}\,\frac{d\omega_2}{dt}\,\vec{\imath} = -R_2\,\frac{d\omega_2}{dt}\,\vec{\imath} = -\frac{3}{2}R \cdot \varepsilon_2\,\vec{\imath}$$

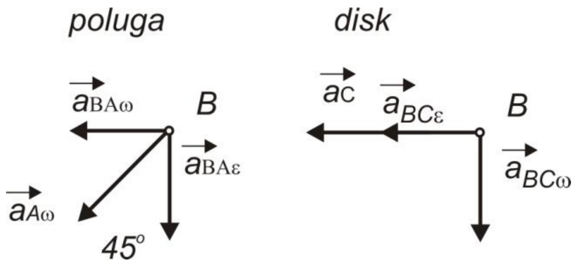
$$\vec{a}_{BC\omega} = -R_2 \cdot \omega_2^2\,\vec{\jmath} = -\frac{3}{2}R\left(\frac{\sqrt{2}}{6} \cdot \omega_1\right)^2 \vec{\jmath} = -\frac{1}{12}R \cdot \omega_1^2\,\vec{\jmath}$$

Kada se izjednače dva vektorska izraza za ubrzanje tačke B dobija se

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA\varepsilon} + \vec{a}_{BA\omega}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_c + \vec{a}_{BC\varepsilon} + \vec{a}_{BC\omega}$$

$$\vec{a}_A + \vec{a}_{BA\varepsilon} + \vec{a}_{BA\omega} = \vec{a}_c + \vec{a}_{BC\varepsilon} + \vec{a}_{BC\omega}$$



i projektuje na x i y osu dobija se

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}R\omega_1^2 - \frac{R}{4} \cdot {\omega_1}^2 = -\frac{3}{2}R \cdot \varepsilon_2 - \frac{3}{2}R \cdot \varepsilon_2$$
$$-\frac{\sqrt{2}}{2}R\omega_1^2 - 2R \cdot \varepsilon_{BA} = -\frac{1}{12}R \cdot \omega_1^2$$

Rešavanjem jednačina dobijaju se ugaona ubrzanja

$$-\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4}\right) \cdot {\omega_1}^2 = -\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right) \cdot \varepsilon_2 \rightarrow \varepsilon_2 = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4}}{3} \cdot {\omega_1}^2 = \frac{1+2\sqrt{2}}{12} \cdot {\omega_1}^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon_{BA} &= \frac{1-6\sqrt{2}}{24} \cdot \omega_1^2 \\ \varepsilon_2 &= \frac{1+2\sqrt{2}}{12} \cdot {\omega_1}^2 \end{aligned}}$$

Zamenjivanjem u izraz za ubrzanje tačke B

$$\vec{a}_B = -\frac{1+2\sqrt{2}}{4} \cdot R{\omega_1}^2 \cdot \vec{\imath} + \frac{1}{12}R \cdot \omega_1^2\,\vec{\jmath}$$

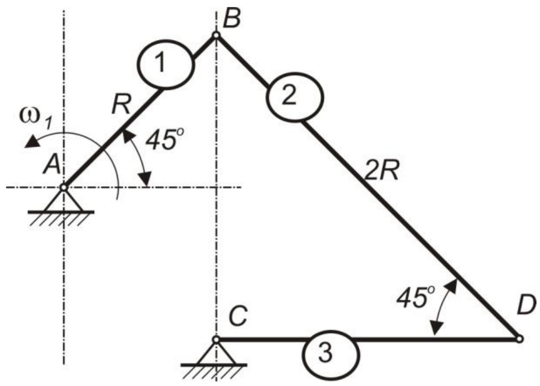
$$a_B = \sqrt{\left(-\frac{1+2\sqrt{2}}{4} \cdot R{\omega_1}^2\right)^2 + \left(\frac{1}{12}R \cdot \omega_1^2\right)^2} = 0.9607\,R \cdot \omega_1^2$$

Zamenjivanjem u izraz za ubrzanje tačke C

$$\vec{a}_c = -a_C\,\vec{\imath} = -R_2\,\frac{d\omega_2}{dt}\,\vec{\imath} = -\frac{1+2\sqrt{2}}{8} \cdot R{\omega_1}^2\ \vec{\imath}$$

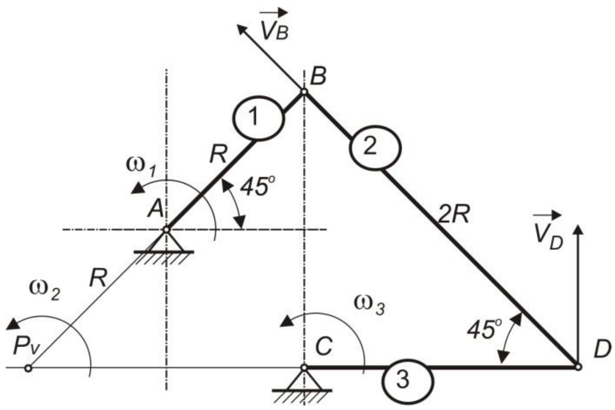
$$a_c = -0.4785 \cdot R{\omega_1}^2$$

Zadatak 12.



Poluga AB dužine R, označena sa 1, obrće se oko nepomične ose, koja je normalna na vertikalnu ravan u kojoj je mehanizam, konstantnom ugaonom brzinom ω_1 oko centra A. Ova poluga čini mehanizam zajedno sa polugom BD dužine 2R, (označena sa 2), i polugom CD, (označena sa 3), koja je horizontalna. Poluge su u tačkama A,B,C i D zglobno vezane. Tačka C se nalazi vertikalno ispod tačke B.
Odrediti brzinu i ubrzanje tačke D, i da li se poluga CD obrće ubrzano ili usporeno.

Rešenje:



Kako se poluga okreće sa ω_1 oko tačke A brzina tačke B tačke poluge

$$V_B = \overline{BA} \cdot \omega_1 = R \cdot \omega_1$$

Kako je tačka B i tačka poluge BD okreće se ugaonom brzinom ω_2 oko pola P_V jasno je da je položaj pola na slici normala na V_B, u tački A i normala na V_D koja mora biti vertikalna u datom trenutku u tački D normalno na polugu CD jer se CD obrće oko tačke C:

Trougao ABP_V je pravougli jednakokraki trougao $45^o 90^o 45^o$ pa su

$$\overline{BP_V} = 2R = \overline{BD} = 2R$$

$$\overline{DP_V} = \sqrt{4R^2 + 4R^2} = 2R\sqrt{2}$$

Brzina tačke B poluge 1 je ista sa brzinom tačke B poluge 2

$$V_B = \overline{BP_V} \cdot \omega_2 = 2R \cdot \omega_2$$

$$\omega_2 = \frac{V_B}{2R} = \frac{R}{2R} \cdot \omega_1 = \frac{1}{2} \cdot \omega_1 \qquad \boxed{\omega_2 = \frac{1}{2} \cdot \omega_1}$$

Brzina tačke D poluge je

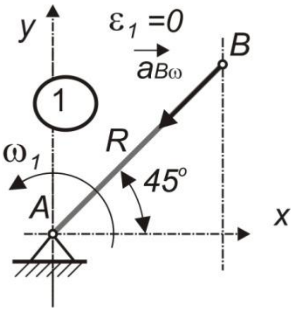
$$V_D = \overline{DP_V} \cdot \omega_2 = 2\sqrt{2}R \cdot \omega_2 = 2R \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \omega_1 = R\sqrt{2} \cdot \omega_1$$

Brzina tačke D poluge 2 je ista sa brzinom tačke D poluge 3

$$V_D = \overline{DC} \cdot \omega_3 = \sqrt{2}R \cdot \omega_3 = R\sqrt{2} \cdot \omega_1$$

Ugaona brzina poluge 3 CD je ω_3

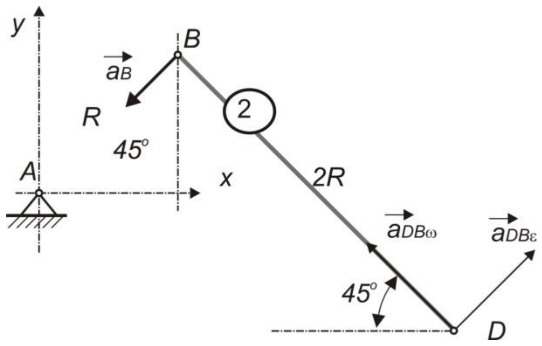
$\omega_3 = \frac{V_D}{\sqrt{2}R} = \frac{R\sqrt{2}\cdot\omega_1}{\sqrt{2}R} = \omega_1$ $\boxed{\omega_3 = \omega_1}$



Ugaono ubrzanje tačke diska B je samo ubrzanje usled ugaone brzine jer jeugaona brzina konstantna

$$\overrightarrow{a_B} = a_{B\varepsilon}\vec{T} + a_{B\omega}\vec{N} = 0\cdot\vec{T} + a_{B\omega}\vec{N} = R\cdot\omega_1^2\vec{N}$$

$$\overrightarrow{a_B} = -\frac{\sqrt{2}}{2}a_{B\omega}\vec{\imath} - \frac{\sqrt{2}}{2}a_{B\omega}\vec{\jmath} = -\frac{\sqrt{2}}{2}R\omega_1^2\vec{\imath} - \frac{\sqrt{2}}{2}R\omega_1^2\vec{\jmath}$$



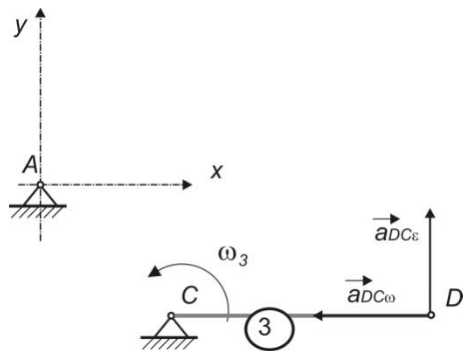
Ugaono ubrzanje tačke B poluge 1 je jednako ubrzanju tačke B poluge 2 a ubrzanje tačke D poluge jednako je vektorskom zbiru

$$\vec{a}_D = \vec{a}_B + \vec{a}_{DB\varepsilon} + \vec{a}_{DB\omega}$$

$a_{DB\varepsilon} = 2R\cdot\varepsilon_2$ $\quad \vec{a}_{DB\varepsilon} = R\sqrt{2}\cdot\varepsilon_2\,\vec{\imath} + R\sqrt{2}\cdot\varepsilon_2\vec{\jmath}$

$$a_{DB\omega} = 2R\cdot(\omega_2)^2 = 2R\left(\frac{1}{2}\cdot\omega_1\right)^2 = \frac{R}{2}\cdot{\omega_1}^2$$

$$\vec{a}_{DB\omega} = -\frac{R\sqrt{2}}{4}\cdot{\omega_1}^2\,\vec{\imath} + \frac{R\sqrt{2}}{4}\cdot{\omega_1}^2\vec{\jmath}$$



Ubrzanje tačke D sa druge strane kao elementa poluge 3

$$\vec{a}_D = \vec{a}_c + \vec{a}_{DC\varepsilon} + \vec{a}_{DC\omega}$$

Ubrzanje tačke C je nula jer ona miruje

$$\vec{a}_{DC\varepsilon} = \overline{DC}\,\frac{d\omega_3}{dt}\,\vec{\jmath} = R\sqrt{2}\,\frac{d\omega_3}{dt}\,\vec{\jmath} = R\sqrt{2}\cdot\varepsilon_3\,\vec{\jmath}$$

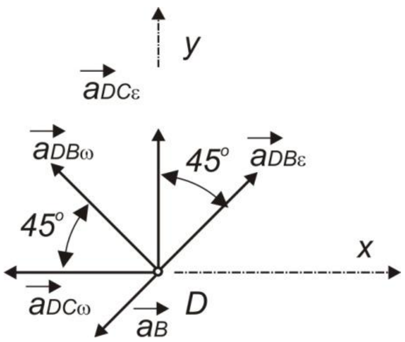
$$\vec{a}_{DC\omega} = -R\sqrt{2}\cdot\omega_3^2\,\vec{\imath} = -R\sqrt{2}(\omega_1)^2\vec{\imath} = -R\sqrt{2}\cdot\omega_1^2\,\vec{\imath}$$

Kada se izjednače dva vektorska izraza za ubrzanje tačke D dobija se

$$\vec{a}_D = \vec{a}_B + \vec{a}_{DB\varepsilon} + \vec{a}_{DB\omega}$$

$$\vec{a}_D = \vec{a}_c + \vec{a}_{DC\varepsilon} + \vec{a}_{DC\omega} = 0 + \vec{a}_{DC\varepsilon} + \vec{a}_{DC\omega}$$

i projektuje na x i y osu dobija se



$$-\frac{\sqrt{2}}{2}R\omega_1^2 + R\sqrt{2}\cdot\varepsilon_2 - \frac{R\sqrt{2}}{4}\cdot{\omega_1}^2 = 0 - R\sqrt{2}\cdot\omega_1^2$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}R\omega_1^2 + R\sqrt{2}\cdot\varepsilon_2 + \frac{R\sqrt{2}}{4}\cdot{\omega_1}^2 = 0 + R\sqrt{2}\cdot\varepsilon_3$$

Rešavanjem jednačina dobijaju se ugaona ubrzanja

Dobija se $\varepsilon_2 = -\frac{1}{4}\cdot\omega_1^2$

Dobija se $\varepsilon_3 = -\frac{1}{2}\cdot\omega_1^2$

Zamenjivanjem u izraz za ubrzanje tačke D

$$\vec{a}_D = -R\sqrt{2}\cdot\omega_1^2\vec{\imath} - R\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\omega_1^2\,\vec{\jmath}$$

$$a_D = R\omega_1^2\sqrt{2+\frac{2}{4}} = R\omega_1^2\frac{\sqrt{10}}{2}$$

Iz izraza za ubrzanje ε_3 *tačke D, jasno je da se poluga CD kreće usporeno.*