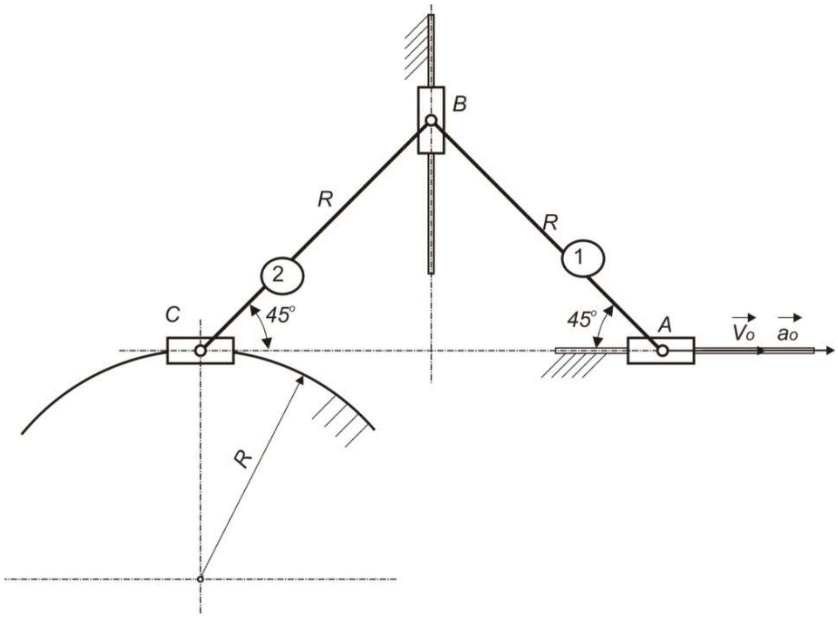
Zadatak 13.

Prikazani mehanizam se sastoji od poluga AB, označena sa 1, i BC, označena sa 2, zglobno vezane u tačkama A,B i C. Zglob A je vezan za klizač koji se kreće po horizontalnoj vođici a u tački B zglob je vezan za klizač koji se kreće po vertikalnoj vođici. U tački C zglobno je vezan klizač koji se kreće po kružnoj vođici poluprečnika R. Za mehanizam u prikazanom položaju, brzina klizača A je $V_o=R\omega_0$ i ubrzanje $a_o=R\omega_o^2$, odrediti brzinu i ubrzanje tačke C kao i ugaono ubrzanje poluge BC.

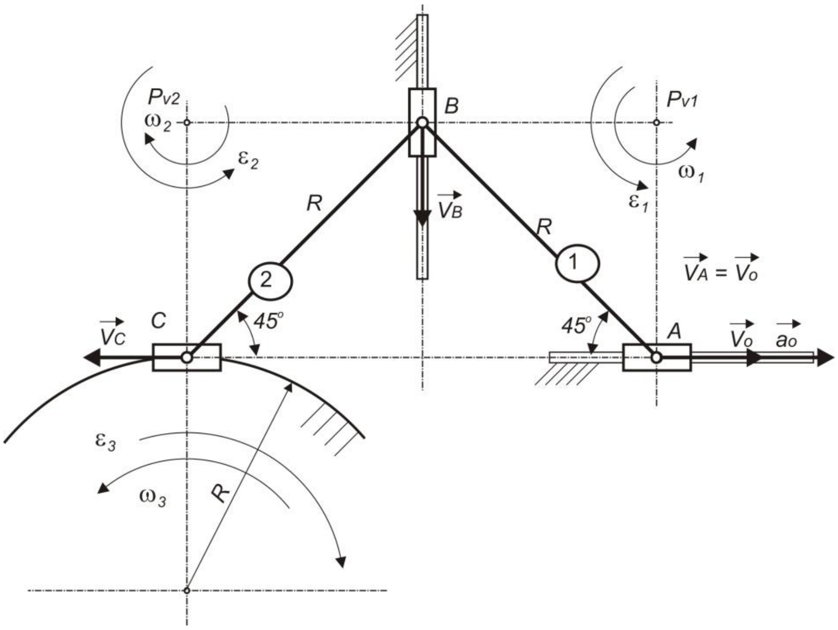


$$V_0 = R \cdot \omega_0$$

$$a_0 = R \cdot \omega_0^2$$

Rešenje:

Kako se klizač A kreće sa V_o, $V_A = V_0 = R \cdot \omega_0$



Kako je tačka A i tačka poluge AB, koja se okreće sa $\omega_{AB} = \omega_1$ oko pola P_V jasno je da je položaj pola kao na slici, u preseku normale na V_A, u tački A i normale na V_B (brzina u ta;ki B mora biti vertikalna pa je u tački B normala na brzinu B horizontalna).

Trougao ABP_V je pravougli jednakokraki trougao $45^o 90^o 45^o$ pa su

$$\overline{BP_{V1}} = \overline{AP_{V1}} = R\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Brzina tačke A poluge je ista sa brzinom tačke A diska

$$V_A = \overline{AP_{V1}} \cdot \omega_{BA} = R\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \omega_{BA} = R\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \omega_1$$

$$\omega_1 = \frac{V_A}{R\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{R\,\omega_0}{R\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} \cdot \omega_0 \qquad \boxed{\omega_{BA} = \omega_1 = \sqrt{2} \cdot \omega_0}$$

Brzina tačke B poluge je

$$V_B = \overline{BP_1} \cdot \omega_{BA} = \frac{\sqrt{2}}{2}R \cdot \omega_{BA} = \frac{\sqrt{2}}{2}R \cdot \omega_1 = R\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \omega_0 = R \cdot \omega_0 = V_0$$

Brzina tačke B poluge je ista sa brzinom tačke B poluge BC a u datom trenutku brzina tačke C je horizontalna, jer je to u prikazanom položaju tangenta na kružnicu

$$V_B = \overline{BP_2} \cdot \omega_{CB} = \frac{\sqrt{2}}{2}R \cdot \omega_{CB} = \frac{\sqrt{2}}{2}R \cdot \omega_2$$

Ugaona brzina oko trenutnog pola 2 ω_2 je

$$\omega_2 = \frac{V_B}{R\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{R\,\omega_0}{R\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} \cdot \omega_0 \qquad \boxed{\omega_2 = \omega_{CB} = \sqrt{2} \cdot \omega_0}$$

Brzina tačke C oko pola P_{V2}

$$V_C = \overline{CP_2} \cdot \omega_{CB} = \frac{\sqrt{2}}{2}R \cdot \omega_{CB} = \frac{\sqrt{2}}{2}R \cdot \omega_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}R\sqrt{2} \cdot \omega_0$$

Ugaona bzina klizača C koji se kreće po krugu ugaonom brzinom ω_3 brzina tačke C

$$V_C = R \cdot \omega_3 = R \cdot \omega_0$$

Ugaono ubrzanje C po kružnoj vođici

$$\omega_3 = \frac{R \cdot \omega_0}{R} = \omega_0$$

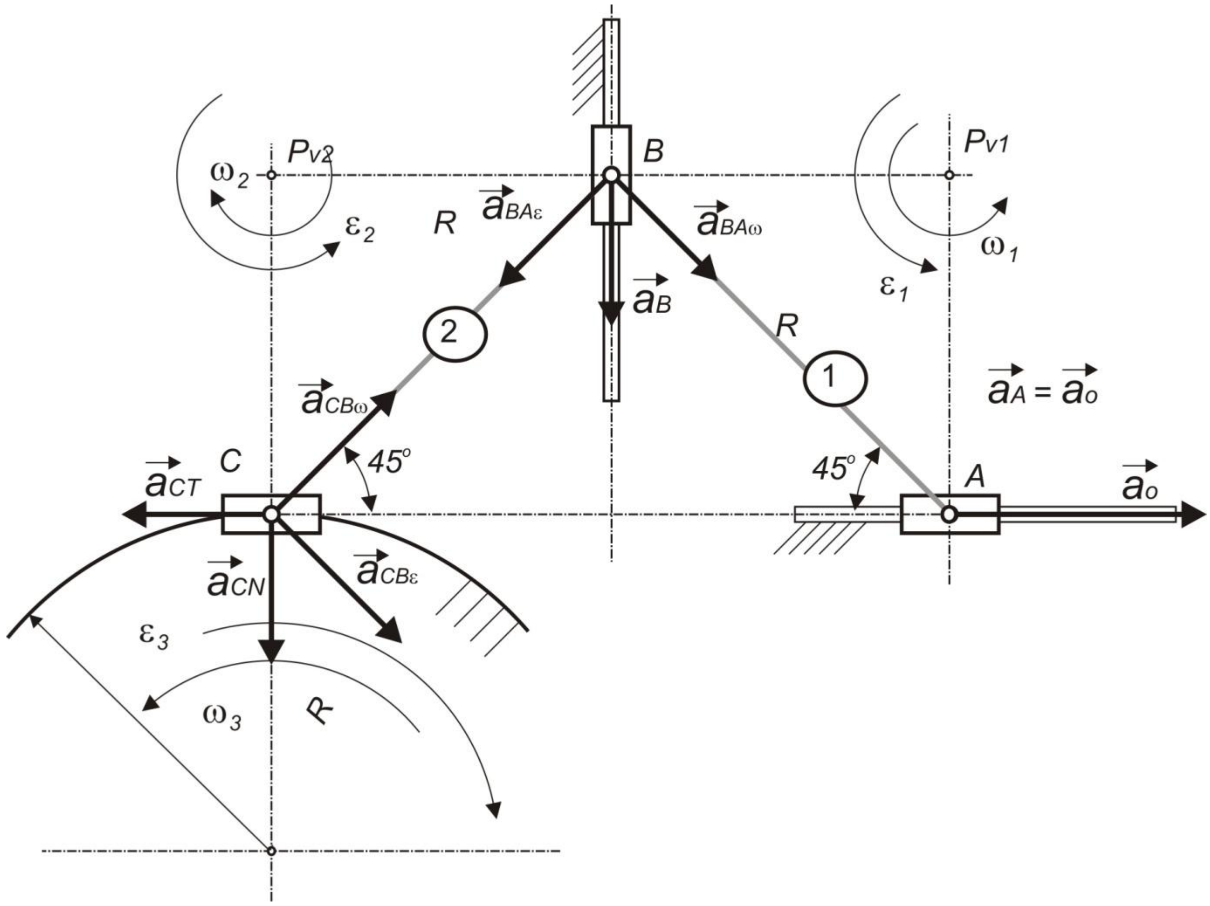
Ubrzanje tačke A je horizontalno, uslovljeno kretanjem po vođici,

$$\overrightarrow{a_A} = a_0\vec{\imath} = R \cdot \omega_0^2\,\vec{\imath}$$

Ugaono ubrzanje tačke poluge B jednako je vektorskom zbiru ubrzanju tačke A poluge, ubrzanje tačke B oko tačke A usled ugaonog ubrzanja i ubrzanju tačke B oko tačke A usled ugaone brzine člana AB

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA\varepsilon} + \vec{a}_{BA\omega}$$

$$a_{BA\varepsilon} = R \cdot \varepsilon_{BA}$$



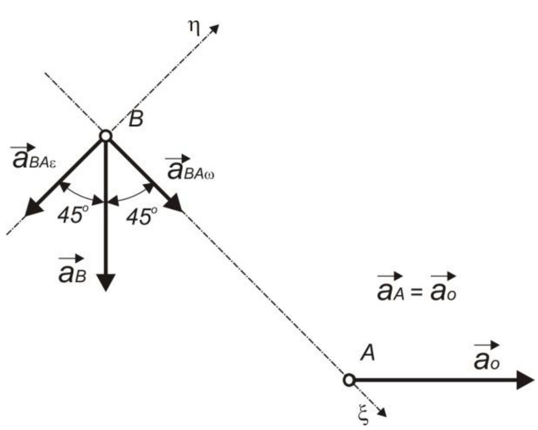
$$\vec{a}_{BA\varepsilon} = -R\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\varepsilon_{BA}\cdot\vec{\imath} - R\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\varepsilon_{BA}\cdot\vec{\jmath}$$

$$a_{BA\omega} = R\cdot(\omega_{BA})^2 = R\cdot(\omega_{BA})^2 = R\left(\sqrt{2}\cdot\omega_0\right)^2 = 2R{\omega_0}^2$$

$$\vec{a}_{BA\omega} = R\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2R{\omega_0}^2\cdot\vec{\imath} - R\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2R{\omega_0}^2\cdot\vec{\jmath}$$

Ubrzanje tačke B mora biti vertikalno, zbog kretanja po vođici,

$$\overrightarrow{a_B} = -a_B\vec{\jmath}$$



Da bi se odredilo ubrzanje tačke B projektovati ubrzanja na pravac AB ξ osa i na normalan pravac AB η osa ili projektovanje vektorskog izraza na x i y osu. Prednost projektovanja na pravac AB je što se isključuje vrednost nepoznatog $\vec{a}_{BA\varepsilon}$ pa se ono u celosti projektuje na normalan pravac na AB.

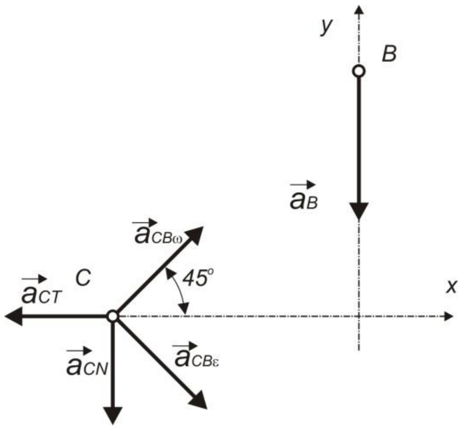
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA\varepsilon} + \vec{a}_{BA\omega}$$

$$\xi: \quad a_B cos45° = a_A cos45° + 0 + a_{BA\omega} \rightarrow a_B$$

$$\eta: \quad -a_B cos45° = a_A cos45° - a_{BA\varepsilon} + 0 \rightarrow a_{BA\varepsilon}$$

$$a_B = a_A + \frac{a_{BA\omega}}{cos\,45°} = R \cdot \omega_0^2 + \frac{2}{\sqrt{2}} 2R{\omega_0}^2 = \left(1 + 2\sqrt{2}\right)R{\omega_0}^2$$

Tačka B je sa druge strane element poluge 2, pa je ubrzanje tačke C jednako vektorskom zbiru



$$\vec{a}_C = \vec{a}_C + \vec{a}_{BC\varepsilon} + \vec{a}_{BC\omega}$$

$$\vec{a}_{BC\varepsilon} = \overline{CB} \cdot \varepsilon_{BC} = R \cdot \varepsilon_{BC} = R \cdot \varepsilon_2$$

$$\vec{a}_{BC\omega} = \overline{CB} \cdot \omega_{BC}^2 = R \cdot \omega_2^2 = 2R \cdot \omega_0^2$$

Ubrzanje tačke C sa druge strane jednako je ubrzanju tačke C koja se kreće po kružnici

$$\overrightarrow{a_c} = a_{CT}\vec{T} + a_{CN}\vec{N} = R \cdot \varepsilon_3 \vec{T} + R \cdot \omega_3^2 \vec{N}$$

Ubrzanje tačke C za konfiguraciju sa slike

$$\overrightarrow{a_c} = a_{CT}\vec{\imath} + a_{CN}\vec{\jmath} = -R \cdot \varepsilon_3 \vec{\imath} - R \cdot \omega_0^2 \vec{\jmath}$$

Kada se izjednače dva vektorska izraza za ubrzanje tačke B dobija se

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{BC\varepsilon} + \vec{a}_{BC\omega}$$

$$\vec{a}_C = \vec{a}_{CT} + \vec{a}_{CN}$$

i projektuje na x i y osu dobija se

$$x: 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a_{BC\varepsilon} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{a}_{BC\omega} = -a_{CT} + 0 \rightarrow a_{CT}$$

$$y: \quad -a_B - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a_{BC\varepsilon} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{a}_{BC\omega} = 0 - a_{CN} \rightarrow a_{BC\varepsilon}$$

$$y: \quad a_B + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a_{BC\varepsilon} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{a}_{BC\omega} = 0 + a_{CN} \rightarrow a_{BC\varepsilon}$$

$$y: \rightarrow a_{BC\varepsilon} = -\frac{2}{\sqrt{2}} \cdot a_B + \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot a_{CN} + \vec{a}_{BC\omega}$$

$$a_{BC\varepsilon} = -\sqrt{2}\left(1 + 2\sqrt{2}\right)R{\omega_0}^2 + \sqrt{2}R\omega_0^2 + 2R\omega_0^2$$

$$a_{BC\varepsilon} = -2R\omega_0^2 \rightarrow \qquad \boxed{\varepsilon_{CB} = \varepsilon_2 = \frac{a_{BC\varepsilon}}{R} = -2\omega_0^2}$$

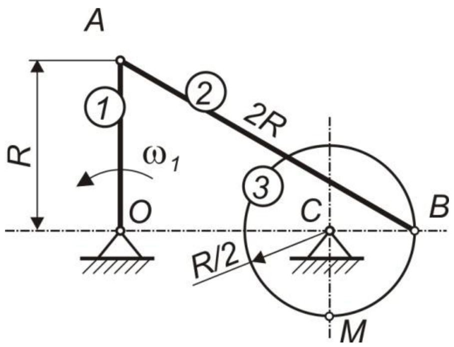
$$x: \rightarrow a_{CT} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a_{BC\varepsilon} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{a}_{BC\omega} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(-2R\omega_0^2 + 2R\omega_0^2) = 0$$

$$a_{CT} = R \cdot \varepsilon_3 = 0 \rightarrow \qquad \boxed{\varepsilon_3 = 0}$$

$$\overrightarrow{a_c} = a_{CT}\vec{\imath} + a_{CN}\vec{\jmath} = 0\,\vec{\imath} - R\omega_0^2\vec{\jmath}$$

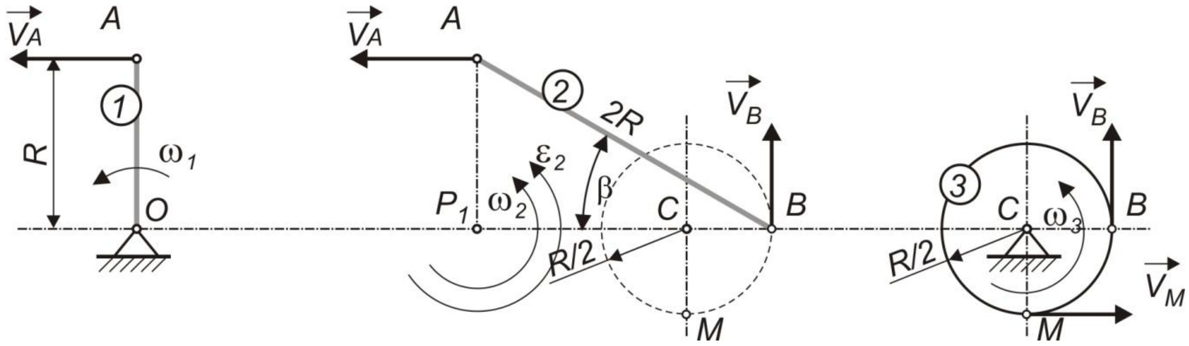
$$a_C = \sqrt{{a_{CT}}^2 + {a_{CN}}^2} = \sqrt{0 + (R\omega_0^2)^2} = R\omega_0^2$$

Zadatak 14.



Mehanizam sačinjavaju poluga OA dužine R (označena sa 1, obrće se oko nepomične ose, koja je normalna na vertikalnu ravan u kojoj je mehanizam, konstantnom ugaonom brzinom ω_1 oko centra O), poluga AB (dužine 2R, označena sa 2) i disk 3 (označen sa 3, prečnika R, obrće se oko nepomične ose C).
Odrediti brzinu i ubrzanje tačke M, kada je mehanizam u položaju na slici.

Rešenje:



Kako se poluga okreće sa ω_1 oko tačke O brzina tačke A tačke poluge

$$V_A = \overline{OA} \cdot \omega_1 = R \cdot \omega_1$$

Brzina tačke A poluge 1 je ista sa brzinom tačke A poluge 2

$$V_A = \overline{OA} \cdot \omega_2 = R \cdot \omega_2$$

Ugaona brzina poluge 2

$$\omega_1 = \frac{R \cdot \omega_2}{R} = \omega_1 \qquad \boxed{\omega_2 = \omega_1}$$

Kako je tačka A i tačka poluge AB okreće se ugaonom brzinom ω_2 oko pola P_V jasno je da je položaj pola na slici normala na V_B, u tački C . Brzina V_B je normala na pravac poluprečnika CB.
Trougao ABP_V je pravougli jednakokraki trougao

$$\overline{BP_V} = \sqrt{4R^2 - R^2} = R\sqrt{3}$$

Brzina tačke B poluge 2

$$V_B = \overline{BP_V} \cdot \omega_2 = \sqrt{3}R \cdot \omega_2 = \sqrt{3}R \cdot \omega_1$$

Brzina tačke B diska 3 oko nepokretne ose obrtanja C je

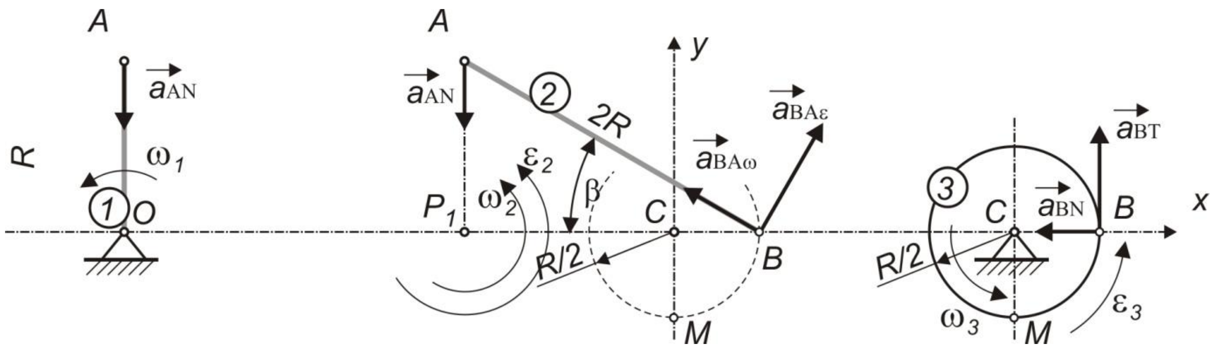
$$V_B = \overline{CB} \cdot \omega_3 = \frac{R}{2} \cdot \omega_3$$

Ugaona brzina poluge 3 CD je ω_3

$$\frac{R}{2} \cdot \omega_3 = R\sqrt{3} \cdot \omega_1 \qquad \boxed{\omega_3 = 2\sqrt{3}\omega_1}$$

Brzina tačke M diska 3

$$V_M = \overline{CM} \cdot \omega_3 = \frac{R}{2} \cdot \omega_3 = \frac{R}{2} \cdot 2\sqrt{3}\omega_1 = R\sqrt{3}\omega_1$$



Sa slike se uočava da je

$\sin\beta = \frac{R}{2R} \to \beta = arcsin\frac{1}{2} = 30°$

Ugaono ubrzanje tačke diska A je samo ubrzanje usled ugaone brzine jer jeugaona brzina konstantna

$$\overrightarrow{a_A} = a_{A\varepsilon}\vec{T} + a_{A\omega}\vec{N} = 0 \cdot \vec{T} + a_{B\omega}\vec{N} = R \cdot \omega_1^2\vec{N}$$

$$\overrightarrow{a_A} = -\frac{\sqrt{2}}{2}a_{A\omega}\vec{j} = -R\omega_1^2\vec{j}$$

Ugaono ubrzanje tačke A poluge 1 je jednako ubrzanju tačke A poluge 2 a ubrzanje tačke B poluge jednako je vektorskom zbiru

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA\varepsilon} + \vec{a}_{BA\omega}$$

$$a_{BA\varepsilon} = 2R \cdot \varepsilon_2$$

$$a_{BA\omega} = 2R \cdot (\omega_2)^2 = 2R(\omega_1)^2 = 2R \cdot {\omega_1}^2$$

$$\vec{a}_{BA\varepsilon} = a_{BA\varepsilon} sin\beta\, \vec{\imath} + a_{BA\varepsilon} cos\beta\, \vec{\jmath} = \frac{1}{2} \cdot 2R\varepsilon_2\, \vec{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2R\varepsilon_2 \vec{\jmath} = R\varepsilon_2\, \vec{\imath} + R\varepsilon_2 \sqrt{3} \vec{\jmath}$$

$$\vec{a}_{BA\omega} = -a_{BA\omega} cos\beta\, \vec{\imath} + a_{BA\omega} sin\beta\, \vec{\jmath} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2R{\omega_1}^2\, \vec{\imath} + \frac{1}{2} \cdot 2R{\omega_1}^2 \vec{\jmath}$$

$$\vec{a}_{BA\omega} = -\sqrt{3}R{\omega_1}^2\, \vec{\imath} + R{\omega_1}^2 \vec{\jmath}$$

Ubrzanje tačke B sa druge strane kao elementa poluge 3

$$\overrightarrow{a_B} = a_{BT}\vec{T} + a_{BN}\vec{N} = \frac{R}{2} \cdot \varepsilon_3 \vec{T} + \frac{R}{2} \cdot \omega_3^2 \vec{N} = -\frac{R}{2} \cdot \omega_3^2\, \vec{\imath} + \frac{R}{2} \cdot \varepsilon_3 \vec{\jmath}$$

$$a_{BT} = \frac{R}{2} \cdot \varepsilon_3$$

$$a_{BN} = \frac{R}{2} \cdot \omega_3^2 = \frac{R}{2}\left(2\sqrt{3}\omega_1\right)^2 = 6R\omega_1^2$$

$$\overrightarrow{a_B} = -6R\omega_1^2 \vec{\imath} + \frac{R}{2} \cdot \varepsilon_3 \vec{\jmath}$$

Kada se izjednače izrazi za ubrzanje tačke B i projektuju na x i y osu

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA\varepsilon} + \vec{a}_{BA\omega}$$

$$\overrightarrow{a_B} = -a_{BN}\vec{\imath} + a_{BT}\vec{\jmath}$$

$$x\!: \; 0 + a_{BA\varepsilon} sin\beta - a_{BA\omega} cos\beta = -a_{BN}$$

$$y\!: \; -a_A + a_{BA\varepsilon} cos\beta + a_{BA\omega} sin\beta = a_{BT}$$

$$x\!: \; 0 + R\varepsilon_2 - \sqrt{3}R{\omega_1}^2 = -6R\omega_1^2 \qquad \boxed{\rightarrow \varepsilon_2 = \left(\sqrt{3} - 6\right)\omega_1^2}$$

$$y\!: \; -R\omega_1^2 + R\varepsilon_2\sqrt{3} + R{\omega_1}^2 = \frac{R}{2} \cdot \varepsilon_3$$

$$\varepsilon_3 = -2\omega_1^2 + 2\varepsilon_2\sqrt{3} + 2{\omega_1}^2 = 2\sqrt{3}\left(\sqrt{3} - 6\right)\omega_1^2$$

$$\varepsilon_3 = \left(6 - 12\sqrt{3}\right)\omega_1^2 = \left(6 - 12\sqrt{3}\right)\omega_1^2 \qquad \boxed{\varepsilon_3 = \left(6 - 12\sqrt{3}\right)\omega_1^2}$$

Ubrzanje tačke M je

$$\overrightarrow{a_M} = a_{MT}\vec{T} + a_{MN}\vec{N} = \frac{R}{2} \cdot \varepsilon_3 \vec{T} + \frac{R}{2} \cdot \omega_3^2 \vec{N}$$

$$\overrightarrow{a_M} = \frac{R}{2} \cdot \left(6 - 12\sqrt{3}\right)\omega_1^2\, \vec{T} + \frac{R}{2} \cdot \left(2\sqrt{3}\omega_1\right)^2 \vec{N}$$

$$\overrightarrow{a_M} = \left(3 - 6\sqrt{3}\right)R\omega_1^2\, \vec{T} + 6R\omega_1^2 \vec{N}$$