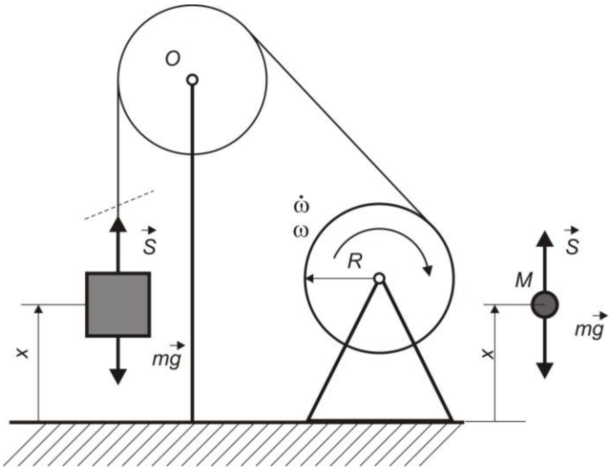
Zadatak 1.

Teret M, mase m težine P, podiže se pomoću užeta koje se namotava na vratilo poluprečnika R. Vratilo se obrće ugaonim ubrzanjem $\dot{\omega}$. Odrediti silu u užetu.



Rešenje:

Ubrzanje mase M je

$$a = \ddot{x} = R\dot{\omega}$$

Prvi zakon dinamike

$$m\,\vec{a} = \sum \vec{F}$$

Teret težine $\vec{P} = m\vec{g}$ *je vezan užetom, sila u užetu je* $\vec{S}$

$m\,\vec{a} = -\vec{P} + \vec{S}$ *projektovanjem jednačine na x osu i zamenom izraza za ubrzanje*

$$m\,R\dot{\omega} = -mg + S \rightarrow S = mR\dot{\omega} - mg = m(R\dot{\omega} - g)$$

$$S = m(R\dot{\omega} - g)$$

Zadatak 2.

Jednačine kretanja tačke mase m=1 kg su

$$x = t^3 - 3t^2$$
$$y = -9t^2 + 1$$
$$z = 5t + 4$$

Odrediti minimalni i maksimalni intenzitet sile koja deluje na tačku u intervalu

$$(t = 0,\ t_1 = 5s)$$

Rešenje:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\begin{array}{lll} x = t^3 - 3t^2 & \dot{x} = 3t^2 - 6t & \ddot{x} = 6t - 6 \\ y = -9t^2 + 1 & \dot{y} = -18t & \ddot{y} = -18 \\ z = 5t + 4 & \dot{z} = 5 & \ddot{z} = 0 \end{array}$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k}$$

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} = \sqrt{(6t-6)^2 + 18^2 + 0} = 6\sqrt{(t-1)^2 + 9}$$

$$a_{min} \to {(t-1)^2}_{min} = 0 \to t = 1 \to a_{min}$$

$$a_{max} \to {(t-1)^2}_{max} = 16 \to t = 5 \to a_{max}$$

$$a_{min} = 6\sqrt{(t-1)^2 + 9} = 6\sqrt{0+9} = 18$$

$$a_{max} = 6\sqrt{(t-1)^2 + 9} = 6\sqrt{4^2+9} = 30$$

$$F_{min} = ma_{min} = 18\ N$$

$$F_{max} = ma_{max} = 30\ N$$

Zadatak 3.

Na tačku M mase m deluje sila $\vec{F} = 9t^2\vec{\imath} + \mathrm{a}\cos kt\ \vec{\jmath}$, gde su a i k konstante, a t vreme. Odrediti zakon kretanja tačke ako je pošla iz koordinatnog početka $\overrightarrow{V_0} = 5\,\vec{k}.$

Rešenje:

$t = 0,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0, \dot{x} = 0,\ \dot{y} = 0,\ \dot{z} = 5, \ddot{x} = 0,\ \ddot{y} = 0,\ \ddot{z} = 0$

$$m\,\vec{a} = \vec{F}$$

vektorska jednačina može da se projektuje na ose kao tri skalarne diferencijalne jednačine

$$m\left(\ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k}\right) = X\vec{\imath} + Y\vec{\jmath} + Z\vec{k}$$

$$m\left(\ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k}\right) = 9t^2\vec{\imath} + \mathrm{a}\cos kt\,\vec{\jmath}$$

Vektorska Diferencijalna jednačina se projektuje na ose

$$X: m\ddot{x} = 9t^2$$

$$Y: m\ddot{y} = a\ coskt$$

$$Z: m\ddot{z} = 0$$

Diferencijalne jednačine se integraljenjem rešavaju i dobijaju zakoni kretanja

$$m\ddot{x} = 9t^2$$

$$\ddot{x} = \frac{9}{m}t^2 \rightarrow \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{9}{m}t^2 \rightarrow d\dot{x} = \frac{9}{m}t^2dt \rightarrow \dot{x} = \frac{9}{m}\int t^2dt + C_1$$

$$\dot{x} = \frac{9}{m}\frac{t^3}{3} + C_1 \rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{9}{m}\frac{t^3}{3} + C_1 \rightarrow x = \frac{3}{m}\int t^3\,dt + \int C_1\,dt + C_2$$

$$x = \frac{3}{4m}t^4 + C_1t + C_2 \rightarrow t = 0, \dot{x} = 0, x = 0, \rightarrow C_1 = 0, C_2 = 0$$

$$\boxed{x = \frac{3}{4m}t^4}$$

$$m\ddot{y} = a\,coskt$$

$$\ddot{y} = \frac{a}{m}\,coskt \rightarrow d\dot{y} = \frac{a}{m}\,coskt\,dt \rightarrow \dot{y} = \frac{a}{m}\,\int coskt\,dt + C_3$$

$$\dot{y} = \frac{a}{m}\frac{1}{k}sinkt + C_3 \rightarrow dy = \frac{a}{m}\frac{1}{k}\int sinktdt + C_3\int dt + C_4$$

$$y = -\frac{a}{m}\frac{1}{k^2}coskt + C_3t + C_4$$

$$t = 0, \quad y = 0, \quad \dot{y} = 0, \ \ddot{y} = 0, \rightarrow C_3 = 0,$$

$$0 = -\frac{a}{m}\frac{1}{k^2}cos0 + C_30 + C_4 \rightarrow C_4 = \frac{a}{mk^2}$$

$$y = -\frac{a}{mk^2}coskt + \frac{a}{mk^2}$$

$$\boxed{y = \frac{a}{mk^2}(1 - coskt)}$$

$$m\ddot{z} = 0$$

$$\ddot{z} = 0 \rightarrow d\dot{z} = 0 \rightarrow \ \dot{z} = \int 0dt + C_5 \rightarrow \dot{z} = C_5$$

$$\dot{z} = C_5 \rightarrow dz = C_5dt \rightarrow z = \int C_5dt + C_6 \rightarrow z = C_5t + C_6$$

$$t = 0, \ z = 0, \dot{z} = 5, \ddot{z} = 0$$

$$\dot{z} = C_5 = 5 \rightarrow C_5 = 5$$

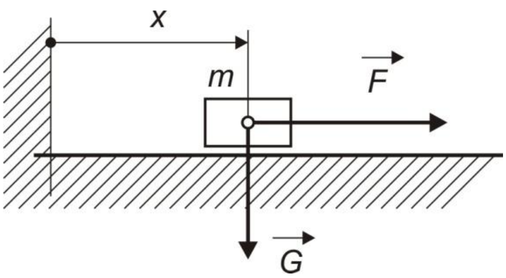
$$z = 5t + C_6 = 0 \rightarrow C_6 = 0$$

$$\boxed{z = 5t}$$

$$\boxed{\vec{r} = \frac{3}{4m}t^4\vec{\imath} + \frac{a}{mk^2}(1 - coskt)\vec{\jmath} + 5t\vec{k}}$$

Zadatak 4.

Telo težine 10 N, se kreće pod dejstvom promenljive sile F=10(1-t) N, gde je vreme t izraženo u s. Koliko će se vremena kretati telo dok se ne zaustavi, ako je u trenutku t=0 njegova brzina V_0=20cm/s, i ako sila deluje u pravcu i smeru kretanja tela. Koliki put telo pređe za to vreme. Računati sa g=9.8m/s^2 .



$$G = gm \rightarrow m = \frac{G}{g} = \frac{10}{g}$$

Rešenje:

$$m\,\vec{a} = \vec{F} + \vec{G}$$

Projektovano na x osu

$$m\,\ddot{x} = F \rightarrow \ddot{x} = \frac{F}{m} = \frac{g}{10}\,10(1-t) \rightarrow \ddot{x} = g(1-t)$$

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = g(1-t) \rightarrow \dot{x} = g\int(1-t)dt$$

$$\dot{x} = g\left(t - \frac{t^2}{2}\right) + C_1$$

$$t = 0 \rightarrow \dot{x} = V_0 = 20\frac{cm}{s} = 0{,}2\frac{m}{s} \rightarrow C_1 = 0{,}2$$

$\dot{x} = g\left(t - \frac{t^2}{2}\right) + 0{,}2$ *kada se telo zaustav i* $\dot{x} = 0$

$$g\left(t - \frac{t^2}{2}\right) + 0{,}2 = 0$$

$$-\frac{1}{2}gt^2 + gt + 0{,}2 = 0$$

$$t_{12} = \frac{-g \pm \sqrt{g^2 + 4\frac{1}{2}g\,0{,}2}}{-2\frac{1}{2}g} = \frac{-9.8 \pm \sqrt{9.8^2 + 2\cdot 9.8\cdot 0{,}2}}{-9.8} \rightarrow t_1 = 2.02\,s\;\; t_2 = -0.0186\,s$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2}gt^2 + gt + 0{,}2 \rightarrow dx = \int\left(-\frac{1}{2}gt^2 + gt + 0{,}2\right)dt$$

$$x = -\frac{1}{6}gt^3 + g\frac{t^2}{2} + 0{,}2t + C_2$$

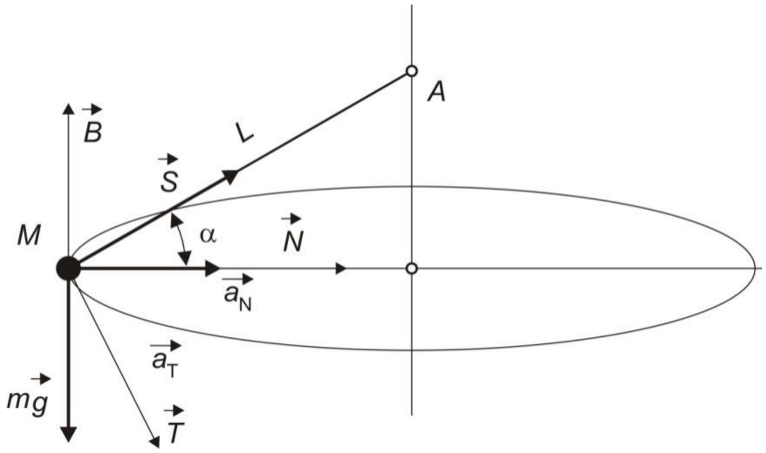
$$t = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

$x = -\frac{1}{6}gt^3 + g\frac{t^2}{2} + 0{,}2t$ *telo pređe put za t_1*

$$t_1 = 2.02 \rightarrow x_1 = -\frac{1}{6}9.8\cdot 2.02^3 + 9.8\frac{2.02^2}{2} + 0{,}2\cdot 2.02 = 6.935\,m$$

Zadatak 5.

Kuglica mase m vezana je za nepomičnu tačku A kanapom dužine L tako da se kreće u horizontalnoj ravni gradeći ugao $\alpha=30^o$ sa tom ravni. Odrediti silu u kanapu i brzinu kuglice.



Rešenje:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_i^a + \vec{F}_W$$

$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{S}$$

$$\vec{a} = a_T\vec{T} + a_N\vec{N}$$

$$a_T = \frac{dV}{dt}$$

$$a_N = \frac{V^2}{Lcos\alpha} = \frac{V^2}{Lcos\,30°} = \frac{2\sqrt{3}V^2}{3L}$$

Vektorska diferencijalna jednačina se projektuje na prirodni koordinatni sistem

$$\text{T: } ma_T = 0 \quad a_T = 0$$

$$\text{N: } ma_N = Scos\alpha$$

$$\text{B: } m0 = Ssin\alpha - mg \rightarrow \quad S = \frac{mg}{sin\alpha} = \frac{mg}{\frac{1}{2}} = 2mg$$

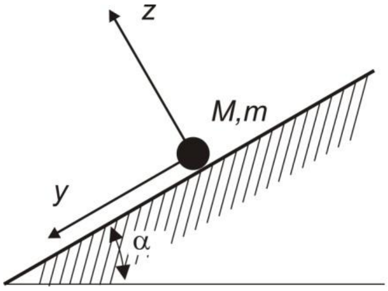
$$a_N = \frac{S}{m}cos\alpha = 2g\frac{\sqrt{3}}{2} = g\sqrt{3}$$

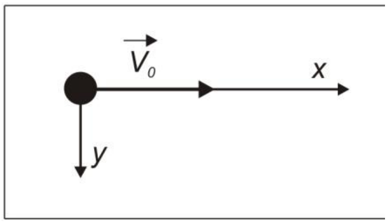
$$a_N = \frac{2\sqrt{3}V^2}{3L} = g\sqrt{3} \rightarrow 2\sqrt{3}V^2 = 3gL\sqrt{3} \rightarrow V = \sqrt{\frac{3gL}{2}}$$

$$a_T = \frac{dV}{dt} = 0 \rightarrow V = C_1 = \sqrt{\frac{3gL}{2}}$$

Zadatak 6.

Po glatkoj ravni pod uglom α u odnosu na horizontalu kreće se tačka M masem. U početnom trenutku t=0 tačka je imala brzinu V_0 u pravcu horizontale na strmoj ravni. Odrediti konačne jednačine kretanja tačke.

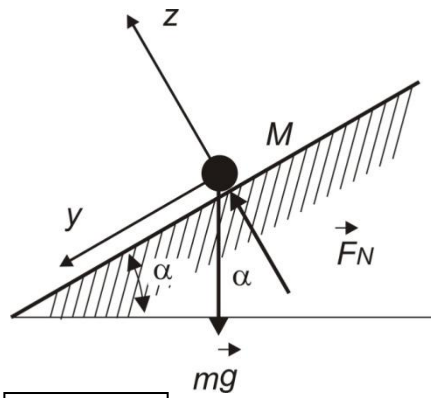




Rešenje:

$t = 0, \; x = 0, \; y = 0, \; z = 0, \dot{x} = V_0, \; \dot{y} = 0, \; \dot{z} = 0, \ddot{x} = 0, \; \ddot{y} = 0, \; \ddot{z} = 0$

Kretanjem tačke po ravni jednačina veze z=0 i od ravni se ne odvaja



$$m\,\vec{a} = \sum \vec{F}$$

$$m\,\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_N$$

$x: m\,\ddot{x} = 0$

$y: m\,\ddot{y} = mgsin\alpha$

$z: m\,\ddot{z} = -mgcos\alpha + F_N = 0 \rightarrow F_N = mgcos\alpha$

$m\,\ddot{x} = 0 \rightarrow \dot{x} = \int 0dt + C_1 = C_1$

$x = \int C_1 dt + C_2 \rightarrow x = C_1 t + C_2$

$\rightarrow t = 0 \; \rightarrow \dot{x} = V_0 = C_1 \rightarrow C_1 = V_0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$

$\boxed{C_2 = 0}$

$x = V_0 t$

$m\,\ddot{y} = mgsin\alpha$

$\ddot{y} = gsin\alpha \rightarrow \dot{y} = gsin\alpha \int dt + C_3 \rightarrow \dot{y} = gsin\alpha t + C_3$

$y = gsin\alpha \int t\,dt + C_3 \int dt + C_4$

$y = gsin\alpha \frac{t^2}{2} + C_3 t + C_4$

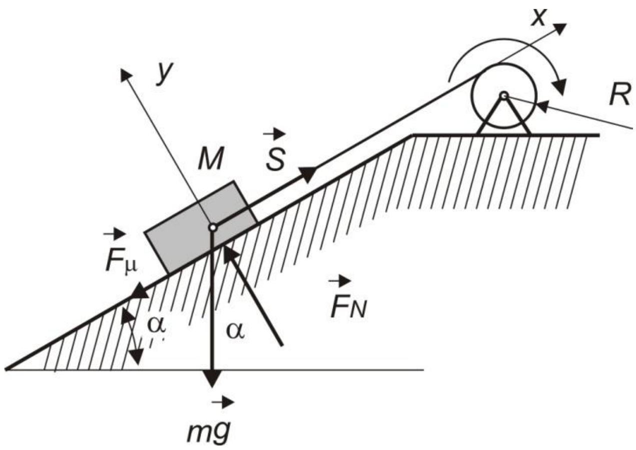
$t = 0 y = 0, \rightarrow C_4 = 0 \quad \dot{y} = 0, \rightarrow C_3 = 0$

$$\boxed{y = \frac{gt^2}{2} sin\alpha}$$

$$\boxed{\vec{r} = V_0 t\,\vec{\imath} + \frac{gt^2}{2} sin\alpha\,\vec{j} + 0\vec{k}}$$

Zadatak 7.

Teret M mase m, podiže se pomoću čekrka po strmoj ravni koja sa horizontalom zaklapa ugao α. Odrediti silu u užetu , ako se doboš čekrka obrće po zakonu $\varphi = \frac{1}{2}at^2$, gde je φ ugao u radijanima, a konstanta i t vreme s. Koeficijent trenja tereta o ravan je μ.



Rešenje:

$$m\,\vec{a} = \sum \vec{F}$$

$$m\,\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_N + \vec{F}_\mu + \vec{S}$$

Prema Kulonovom zakonu

$$F_\mu = \mu F_N$$

Kretanje po ravni $y = 0, \dot{y} = 0, \ddot{y} = 0$

$$x: m\ddot{x} = S - F_\mu - mg sin\alpha \rightarrow S$$

$$y: m\ddot{y} = -mg cos\alpha + F_N = 0 \rightarrow$$

$$F_N = mg cos\alpha \rightarrow F_\mu = \mu mg cos$$

$$S = m\ddot{x} + mg(sin\alpha + \mu cos\alpha)$$

Pošto se čekrk poluprečnika R obrće po zakonu $\varphi = \frac{1}{2}at^2$

$x = R\varphi = \frac{1}{2}R\,at^2$

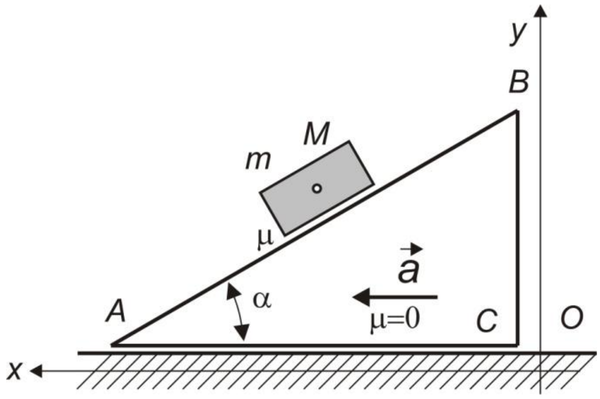
$\dot{x} = R\dot{\varphi} = R\,at$

$\ddot{x} = R\ddot{\varphi} = R\,a$

$$S = mRa + mg(sin\alpha + \mu cos\alpha) = m[Ra + g(sin\alpha + \mu cos\alpha)]$$

Zadatak 8.

Na hrapavoj strani prizme ABC nalazi se telo M. Prizmi je saopšteno ubrzanje a u horizontalnom pravcu. Odrediti najveće ubrzanje pri kome će telo mirovati u odnosu na prizmu i veličinu pritiska tela na prizmu pri tom ubrzanju, ako je koeficijent trenja $\mu < tg\alpha$.



Rešenje:

$$m\,\vec{a} = \sum \vec{F}$$

$$m\,\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_\mu$$

Prema kulonovom zakonu

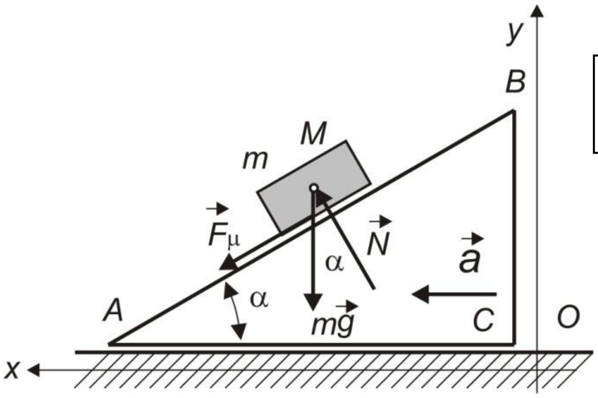
$$F_\mu = \mu N$$

$$\vec{a} = a\,\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

Vektorska diferencijalna jednačina se projektuje na ose Dekartovog koordinatnog sistema

$$x: m\ddot{x} = F_\mu cos\alpha + N sin\alpha$$

$$y: m\ddot{y} = -mg + N cos\alpha - F_\mu sin\alpha = 0 \rightarrow N$$



$$0 = -mg + N\cos\alpha - N\mu\sin\alpha$$

$$\boxed{N = \frac{mg}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}}$$

$$ma = F_\mu\cos\alpha + N\sin\alpha$$

$$ma = N(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)$$

$$ma = \frac{mg}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)$$

$$\boxed{a = \frac{g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}}$$