Savijanje – statički neodređeni nosači

Statička neodređenost nosača
Uslovi neprekidnosti elastične linije

Prva jednačina savijanja

$$\sigma_z = \frac{M}{I_x} y$$

- Normalni napon u nekoj tački poprečnog preseka σ
- M – moment sprega
- I_x – aksijalni moment inercije površine za tu osu
- y – udaljenost posmatranog vlakna od ose

Druga jednačina savijanja

$$K=\frac{1}{R_k}=\frac{M}{E\cdot I_x}=\frac{M}{B}$$

- K- krivina elastične linije
- ***M*** – moment sprega
- I_x – aksijalni moment inercije površine za tu osu
- E – modul elastičnosti
- ***B***=E·I_x – krutost savijanja grede
- R_k – poluprečnik krivine

Diferencijalna jednačina elastične linije

- Pomoću druge glavne jednačine definisana je krivina elastične linije savijenog nosača
- Iz matematike je poznato da se pod krivinom podrazumeva odnos

$$K=\frac{ds}{d\alpha}=\frac{1}{R}=\frac{M}{E\cdot I_x}=\frac{M}{B}$$

Gde je:

- R poluprečnik krivine
- d**s** elementarni luk
- dα elementarna promena ugla

Nagib tangente krive prema Ox osi iz matematike

- Nagib tangente krive f(x) je prvi izvod funkcije koja predstavlja krivu

$$tg\alpha = y', \qquad \frac{1}{\cos^2\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dx} = y''$$

- Kako je element luka krive

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + y'^2}$$

- Odatle je krivina

$$K = \frac{1}{R} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{y''dx\cos^2\alpha}{ds} = \frac{y''}{\sqrt{\left(1 - y'^2\right)}}$$

Diferencijalna jednačina elastične linije

- Usled savijanja težište nekog preseka se spušta za dužinu koju nazivamo

ugib elastične linije (strela)

- tangenta sa osom Az gradi ugao koji se naziva **nagib grede**

Diferencijalna jednačina elastične linije proste grede

$$y'' = -\frac{M_f^L}{E \cdot I_x} = -\frac{M_f^L}{B}$$

$$By'' = -M_f^L$$

Gde su:

- M_f moment savijanja u preseku z
- $B = E \cdot I_x$ savojna krutost grede

Analitičko određivanje elastične linije

- Odrediti otpore oslonaca za rešavani nosač
- Napisati izraze za promenu momenta savijanja u funkciji od podužne koordinate z
- Proizvod savojne krutosti i drugog izvoda jednak je negativnom momentu savijanja i to predstavlja diferencijalnu jednačinu elastične linije

$$B\,y'' = -M_f^L$$

Statička neodređenost nosača

- Statička neodređenost nosača je broj nepoznatih komponenata umanen za broj statičkih uslova ravnoteže

Statička neodređenost nosača

- Nepoznate komponente su najčešće reakcije veza nosača
- Statički uslovi ravnoteže

$\sum Z_i = 0$ $\sum Y_i = 0$ $\sum M_i = 0$

Primer - konzola sa osloncem

- Otpori oslonaca 4 $\boldsymbol{Z_A, Y_A, M_A, F_B}$
- Broj statičkih uslova ravnoteže 3

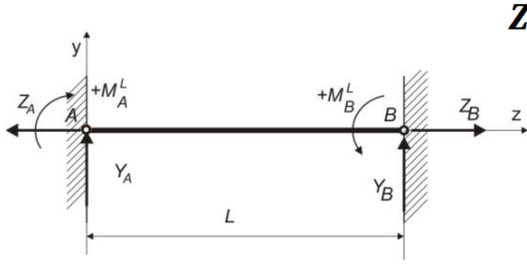
$$\boldsymbol{\sum Z_i = 0, \quad \sum Y_i = 0, \quad \sum M_i = 0}$$

$$\mathbf{4 - 3 = 1}$$

- Jedanput statički neodređen nosač

Primer – obostrano uklještena greda

$$\boldsymbol{Z_A, Y_A, M_A, Z_B, Y_B, \ M_B}$$



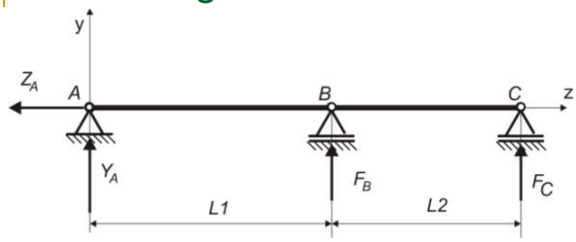
$$\boldsymbol{\sum Z_i = 0, \quad \sum Y_i = 0, \quad \sum M_i = 0}$$

- Otpori oslonaca 6
- Broj statičkih uslova ravnoteže 3

$$\mathbf{6 - 3 = 3}$$

- Triput statički neodređena nosač

Primer – greda sa tri oslonca



$$Z_A, Y_A, F_B, F_C$$

$$\sum Z_i = 0, \quad \sum Y_i = 0, \quad \sum M_i = 0$$

- Otpori oslonaca 4
- Broj statičkih uslova ravnoteže 3

$$4 - 3 = 1$$

- jedanput statički neodređena nosač

Rešavanje statički neodređenog nosača

- Pri rešavanju treba postaviti onoliko dopunskih jednačina koliko puta je nosač statički neodređen
- Dopunske jednačine se postavljaju na osnovu činjenice da se čvrsta greda deformiše pod dejstvom opterećenja ali da je njena elastična linija neprekidna

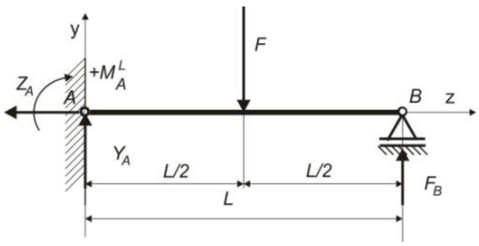
Opšti metod rešavanja statički neodređenog nosača

- Zamisliti da je prekobrojni oslonac određen
- Njegov uticaj na nosač zameniti statički nepoznatim naknadnim uslovom neprekidnosti elastične linije rešavanog nosača

Uslovi neprekidnosti elastične linije

- Na mestu krutog oslonca ugib je jednak nuli
- Na mestu uklještenja nagib tangente elastične linije je jednak nuli
- Kod krutog oslonca grede sa više oslonaca nagib sa jedne strane oslonca jednak je nagibu sa druge strane oslonca (jedna tangenta u osloncu B)

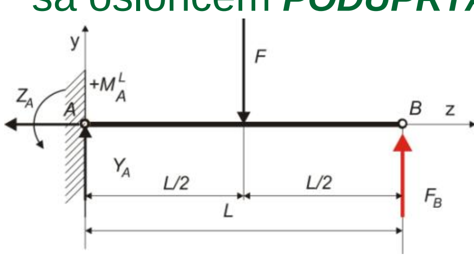
Primeri greda sa jednim rasponom - konzola sa osloncem



$$Z_A, Y_A,\ M_A, F_B$$
$$\sum Z_i = 0,$$
$$\sum Y_i = 0,$$
$$\sum M_i = 0$$
$$4 - 3 = 1$$

- Jedanput statički neodređen nosač moguće a dopunski uslov se može dobiti:
- 1. konzole sa nepoznatom silom F_B poduprta konzola
- 2. rešavati kao gredu sa nepoznatim momentom uklještenja M_A

Primeri greda sa jednim rasponom - konzola sa osloncem ***PODUPRTA KONZOLA***



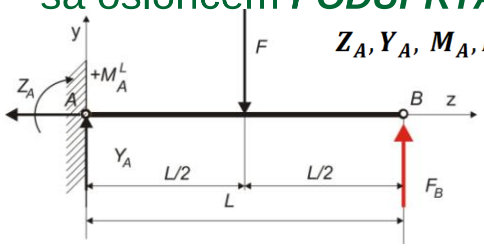
$$Z_A, Y_A,\ M_A, F_B$$
$$\sum Z_i = 0,$$
$$\sum Y_i = 0,$$
$$\sum M_i = 0$$
$$4 - 3 = 1$$

konzole sa nepoznatom silom F_B poduprta konzola

- Usov da je na osloncu B ugib jednak nuli nema pomeranja u vertikalnom pravcu
- Ugib je posledica aktivne sile na sredini i uvedene sile F_B

$$f_B = f_F + f_{F_B} = 0$$

Primeri greda sa jednim rasponom - konzola sa osloncem ***PODUPRTA KONZOLA***



$\boldsymbol{Z_A, Y_A, M_A, F_B}$ $\boldsymbol{\sum Z_i = 0,}$ $\boldsymbol{\sum Y_i = 0,}$ $\boldsymbol{\sum M_i = 0}$

$\boldsymbol{4 - 3 = 1}$

$$f_B = f_F + f_{F_B} = 0$$

Tabela 10 strana 59 ugib na kraju konzole sa silom

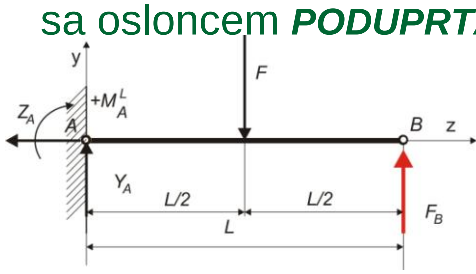
Od sile F za tablicu z=l i a=l/2

$$f_F = \frac{Fl^3}{6\mathcal{B}}\cdot\left(\frac{a}{l}\right)^2\cdot\left[3-\left(\frac{a}{l}\right)\right] = \frac{Fl^3}{6\mathcal{B}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left[3-\left(\frac{1}{2}\right)\right] \qquad f_F = \frac{5Fl^3}{48\mathcal{B}}$$

Od sile F_B za tabelu 11 z=l i a=l i znak – zbog smera sile

$$f_{F_B} = -\frac{F_B l^3}{3\mathcal{B}}$$

Primeri greda sa jednim rasponom - konzola sa osloncem ***PODUPRTA KONZOLA***



$$f_F = \frac{5Fl^3}{48\mathcal{B}} \qquad f_{F_B} = -\frac{F_B l^3}{3\mathcal{B}}$$

$$\frac{5Fl^3}{48\mathcal{B}} - \frac{F_B l^3}{3\mathcal{B}} = 0 \rightarrow F_B = \frac{5F}{16}$$

potom sledi rešavanje konzole sa poznatom silom F_B na kraju konzole

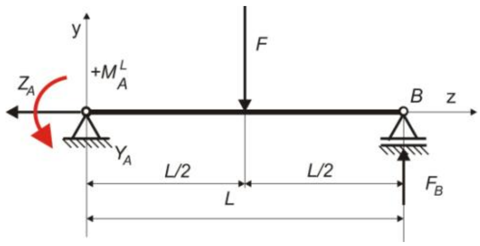
$F_B = \frac{5F}{16}$

$\sum Z_i = Z_A = 0$

$\sum Y_i = F_A - F - F_B = 0$ $\qquad F_A = \frac{11F}{16}$

$\sum M_A = -M_A + F\cdot\frac{L}{2} + F_B\cdot L = 0$ $\qquad M_A = \frac{3FL}{16}$

Primeri greda sa jednim rasponom

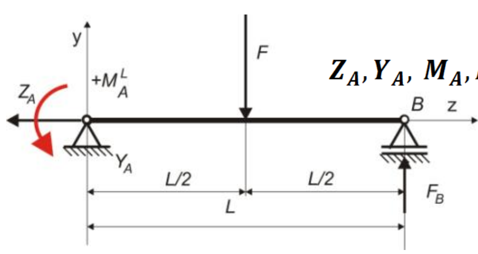


$$\boldsymbol{Z_A, Y_A,\ M_A, F_B}$$
$$\sum \boldsymbol{Z_i = 0},$$
$$\sum \boldsymbol{Y_i = 0},$$
$$\sum \boldsymbol{M_i = 0}$$
$$\boldsymbol{4 - 3 = 1}$$

rešavati kao gredu sa nepoznatim momentom uklještenja M_A

- Usov da je na osloncu A nagib jednak nuli greda je horizontalna
- Nagib je posledica aktivne sile na sredini i momenta uklještenja M_A $\quad \alpha_A = \alpha_F + \alpha_{M_A} = 0$

Primeri greda sa jednim rasponom



$$\boldsymbol{Z_A, Y_A,\ M_A, F_B} \ \sum \boldsymbol{Z_i = 0}, \quad \sum \boldsymbol{Y_i = 0}, \ \sum \boldsymbol{M_i = 0}$$

$$\boldsymbol{4 - 3 = 1}$$

$$\alpha_A = \alpha_F + \alpha_{M_A} = 0$$

Tabela1 strana 43 od sile F gde je a=b=l/2 $\quad \alpha_F = \dfrac{Fl^2}{16\mathcal{B}}$

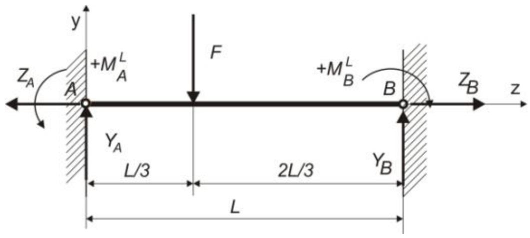
Tabela 3b strana 47 nagib od momenta M_A $\quad \alpha_{M_A} = -\dfrac{M_A l}{3\mathcal{B}}$

$$\alpha_A = \frac{Fl^2}{16\mathcal{B}} - \frac{M_A l}{3\mathcal{B}} = 0 \qquad M_A = \frac{3FL}{16}$$

$$\sum Z_i = Z_A = 0 \qquad \sum Y_i = F_A - F - F_B = 0 \qquad F_B = \frac{5F}{16}$$

$$\sum M_A = -M_A + F \cdot \frac{L}{2} + F_B \cdot L = 0 \qquad F_A = \frac{11F}{16}$$

Primeri greda sa jednim rasponom obostrano uklještena greda



$Y_A;\ Z_A; M_A\ ; Y_B; Z_B; M_A; M_B$

$\sum Z_i = 0 \quad \sum Z_i = Z_A = Z_B = 0$

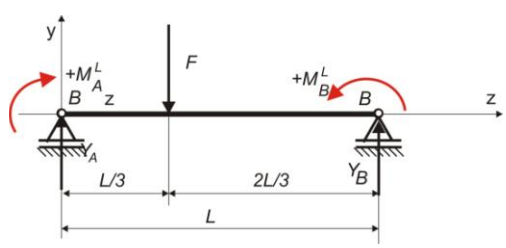
$\sum Y_i = 0 \quad \sum M_i = 0$

$4 - 2 = 2$

- Dvaputa statički neodređen ravan nosač, jer nema aktivnih komponenata u pravcu z
- Dopunske dve jednačine su uslovi kontinuiteta nagiba elastične linije kod uklještenja horizontalna greda

$$\alpha_A = 0 \qquad \beta_B = 0$$

Primeri greda sa jednim rasponom obostrano uklještena greda



$Y_A;\ Z_A; M_A\ ; Y_B; Z_B; M_A; M_B$

$\sum Z_i = 0 \quad \sum Z_i = Z_A = Z_B = 0$

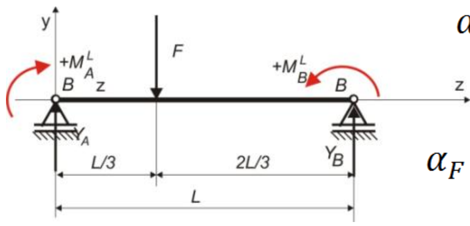
$\sum Y_i = 0 \quad \sum M_i = 0$

$4 - 2 = 2$

- Nagib na osloncima je posledica delovanja koncentrisane sile i momenata uklještenja oslonaca A i B

$$\alpha_A = \alpha_F + \alpha_{M_A} + \alpha_{M_B} = 0$$
$$\beta_A = \beta_F + \beta_{M_A} + \beta_{M_B} = 0$$

Primeri greda sa jednim rasponom obostrano uklještena greda



$$\alpha_A = \alpha_F + \alpha_{M_A} + \alpha_{M_B} = 0$$

$$\beta_A = \beta_F + \beta_{M_A} + \beta_{M_B} = 0$$

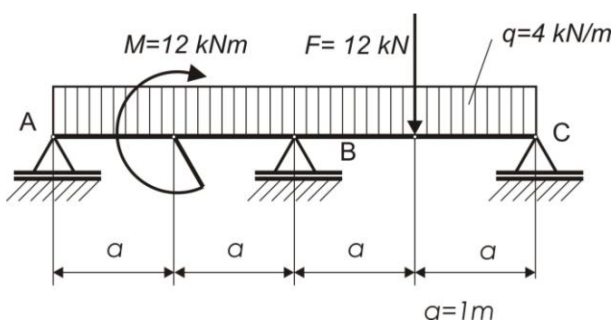
$$\alpha_F = \frac{Fl^2}{6\mathcal{B}} \cdot \frac{a}{l} \cdot \frac{b}{l}\left(1 + \frac{b}{l}\right) = \frac{5Fl^2}{81\mathcal{B}}$$

$$\beta_F = -\frac{Fl^2}{6\mathcal{B}} \cdot \frac{a}{l} \cdot \frac{b}{l}\left(1 + \frac{a}{l}\right) = -\frac{4Fl^2}{81\mathcal{B}}$$

$$-\frac{M_A l}{3\mathcal{B}} + \frac{M_B l}{6\mathcal{B}} + \frac{5Fl^2}{81\mathcal{B}} = 0$$

$$\frac{M_A l}{6\mathcal{B}} + \frac{M_B l}{3\mathcal{B}} - \frac{4Fl^2}{81\mathcal{B}} = 0$$

Greda sa dva raspona



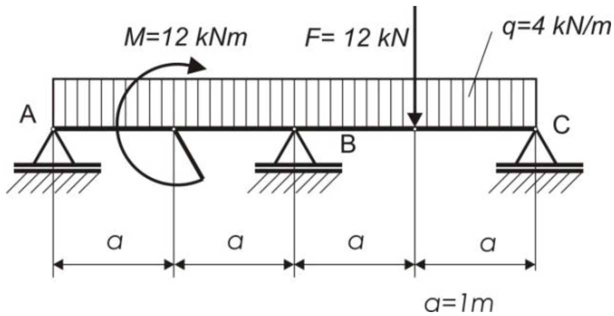
$$\sum X_i = 0$$

$$\sum Y_i = 0$$

$$\sum M_i = 0$$

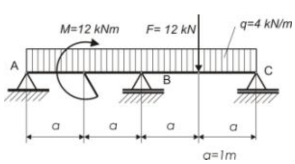
- Nepoznate
- Nepokretan cilindrični zglob
- Dva pokretna cilindrična zgloba
- Na raspolaganju tri jednačine a četiri nepoznate pa je greda statički nije rešiva

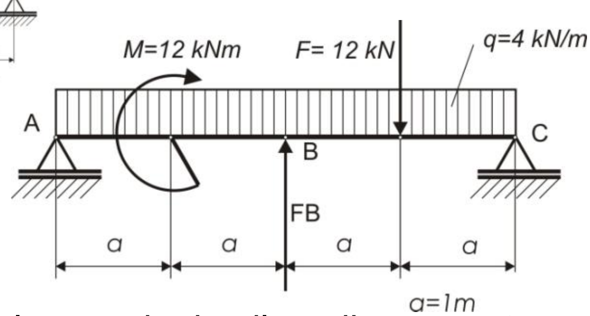
Greda sa dva raspona



- Rešavanje na dva načina
- Uvođenjem fiktivne sile FB
- Razdvajanjem na dve grede AB i BC

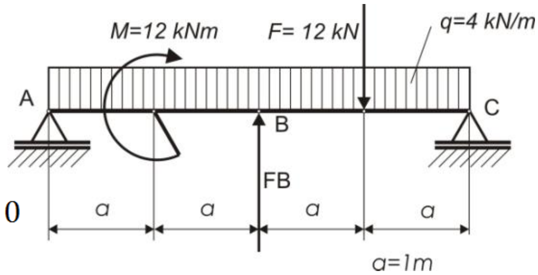
Greda sa dva raspona Uvođenje fiktivne sile FB





- Dopunski uslov uvođenja sile ugib na mestu oslonca je jednak nuli pa je i ugib na mestu sile FB jednak nuli

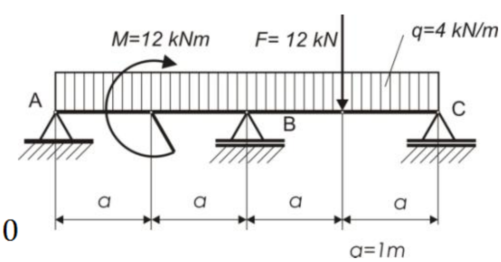
Greda sa dva raspona Uvođenje fiktivne sile FB



$$f_B = f_F + f_q + f_M + f_{F_B} = 0$$

- Ugib na mestu B je od:
- Sile F
- Konrinualnog opterećenja
- Koncentrisanog momenta i od
- **Fiktivne sile FB**

Greda sa dva raspona Uvođenje fiktivne sile FB



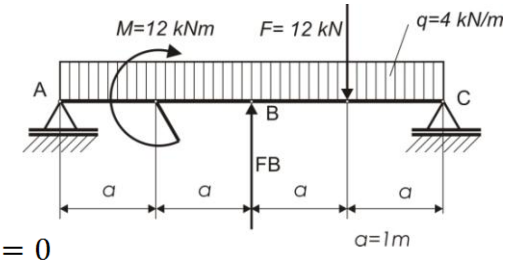
$$f_B = f_F + f_q + f_M + f_{F_B} = 0$$

Ugib od sile F=12 a=3, b=1, l=4, z=2 tabela 1

$$f_F = \frac{F \cdot l^3}{6\mathcal{B}}\left\{\frac{b}{l}\cdot\frac{z}{l}\left[1-\left(\frac{b}{l}\right)^2-\left(\frac{z}{l}\right)^2\right]\right\} =$$

$$\frac{12 \cdot 4^3}{6\mathcal{B}}\left\{\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{4}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{2}{4}\right)^2\right]\right\} = \frac{11}{\mathcal{B}}$$

Greda sa dva raspona Uvođenje fiktivne sile FB



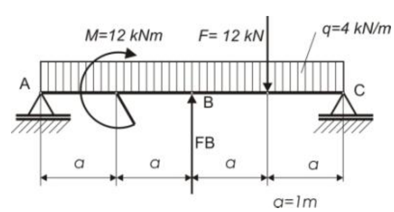
$$f_B = f_F + f_q + f_M + f_{F_B} = 0$$

Ugib od kontinualnog opterećenja q=4 a=0, b=2, l=4, z=2 tabela 7d

$$f_q = \frac{5 \cdot F_q \cdot l^3}{384\mathcal{B}} = \frac{5 \cdot 16 \cdot 4^3}{384\mathcal{B}} = \frac{40}{3\mathcal{B}}$$

Greda sa dva raspona Uvođenje fiktivne sile FB

$$f_B = f_F + f_q + f_M + f_{F_B} = 0$$

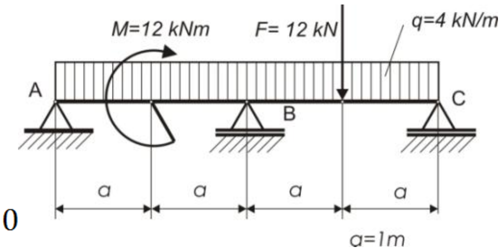


Ugib od sile M=12 a=1, b=3, l=4, z=2 tabela 5

$$f_M = -\frac{M \cdot l^2}{6\mathcal{B}} \left\{ \frac{z}{l} \left[1 - 3\left(\frac{b}{l}\right)^2 - \left(\frac{z}{l}\right)^2 \right] + 3\left(\frac{z-a}{l}\right)^2 \right\}$$

$$= -\frac{6 \cdot 4^2}{6\mathcal{B}} \left\{ \frac{2}{4} \left[1 - 3\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{2}{4}\right)^2 \right] + 3\left(\frac{2-1}{4}\right)^2 \right\} = \frac{9}{\mathcal{B}}$$

Greda sa dva raspona Uvođenje fiktivne sile FB

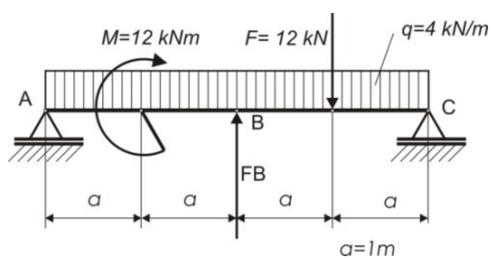


$$f_B = f_F + f_q + f_M + f_{F_B} = 0$$

Ugib od sile F_B a=2, b=2, l=4, z=2 tabela 1a

$$f_{FB} = -\frac{F_B \cdot l^3}{48\,\mathcal{B}} = -\frac{F_B \cdot 4^3}{48\,\mathcal{B}} = -\frac{F_B \cdot 4}{3\,\mathcal{B}}$$

Greda sa dva raspona Uvođenje fiktivne sile FB



$$f_B = f_F + f_q + f_M + f_{F_B} = 0$$

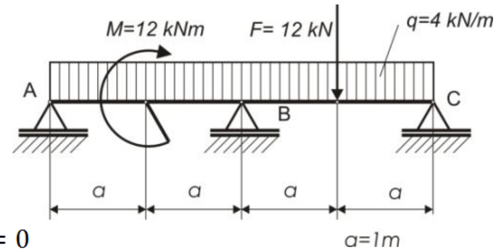
$$+\frac{40}{3\mathcal{B}} + \frac{11}{\mathcal{B}} + \frac{9}{\mathcal{B}} - \frac{F_B \cdot 4}{3\,\mathcal{B}} = 0 \quad | \cdot 3\,\mathcal{B}$$

$$4F_B = 40 + 27 + 33 = 100$$

$$F_B = \frac{100}{4} = 25 \text{ kN}$$

Greda sa dva raspona Uvođenje fiktivne sile FB

$$F_B = \frac{100}{4} = 25 \text{ kN}$$



$$\sum Z_i = Z_A = 0$$

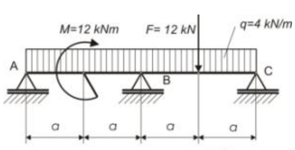
$$\sum Y_i = F_A + F_B + F_C - q \cdot 4a - F = 0$$

$$\sum M_A = M + F \cdot 3a + a \cdot q \cdot 2a - 2a \cdot F_B - \ 4a \cdot F_C = 0$$

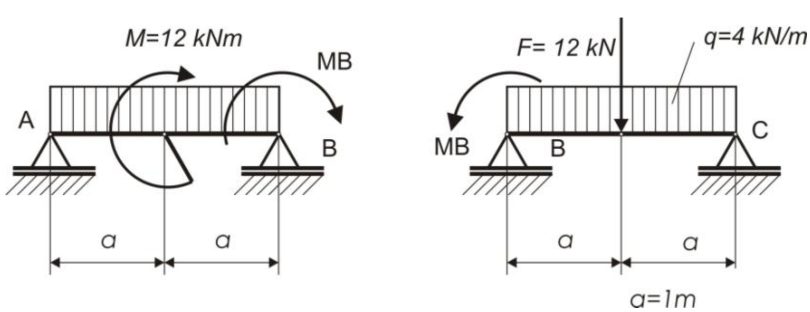
$$F_A = -4.5 \ kN \qquad F_C = 7.5 \ kN$$

- Određen je otpor oslonca FB
- Dalje rešavanje se izvodi kao kod statički određenog nosača

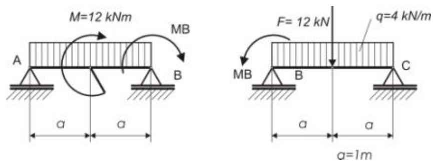
Greda sa dva raspona metod dekompozicije



- Razdvajanjem na dve grede AB i BC



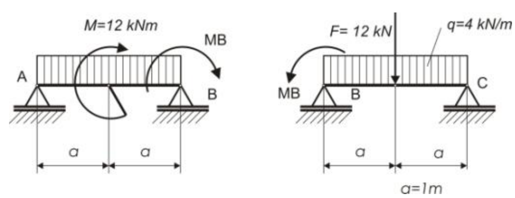
Greda sa dva raspona metod dekompozicije



$$\beta_B = \alpha_B$$

- Rešavaju se dve odvojene grede
- Kao nepoznate se uvode dva momenta istog intenziteta a suprotnih smerova na mestu razdvajanja – oslonca B
- Nagib oslonca B leve strane jednak je nagibu oslonca B sa desne strane
- Voditi računa o izabranim smerovima rastavnih momenata kada su kao na slici tablica 7*

Greda sa dva raspona metod dekompozicije

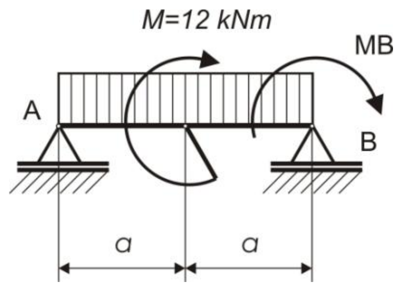


$$\beta_B = \alpha_B$$

$$\beta_B = \beta_M + \beta_{MB} + \beta_q \qquad \alpha_B = \alpha_F + \alpha_q + \alpha_{MB}$$

- Nagib βB i αB
- Odrediti na osnovu opterećenja leve, odnosno desne grede
- Otpor oslonca B grede jednak je algebarskom zbiru otpora oslonaca leve i desne grede

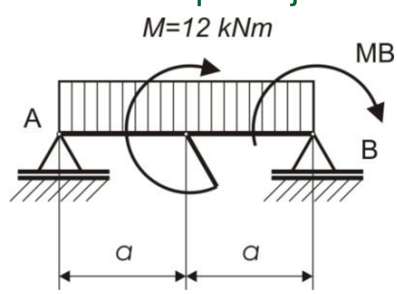
Greda sa dva raspona metod dekompozicije



$$\beta_B = \beta_M + \beta_{MB} + \beta_q$$

- Nagib βB nastaje od:
- Aktivnog spoljašnjeg momenta M
- Momenta rastavljanja – dekompozicije MB
- Aktivnog kontinualnog opterećenja

Greda sa dva raspona metod dekompozicije



$$\beta_B = \beta_M + \beta_{MB} + \beta_q$$

Nagib od momenta M=12 a=1, b=1, l=2 tabela 5

$$\beta_M = -\frac{Ml}{24\mathcal{B}} = -\frac{12 \cdot 2}{24 \cdot \mathcal{B}} = -\frac{24}{24 \cdot \mathcal{B}}$$

Nagib od kontinualnog opterećenja q=4 a=0, b=0, l=2 tabela 6

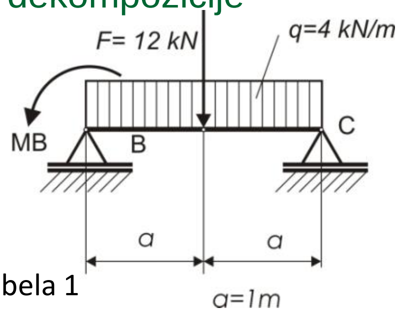
$$\beta_q = -\frac{F_q \cdot l^2}{24\mathcal{B}} = -\frac{8 \cdot 2^2}{24\mathcal{B}} = -\frac{8 \cdot 4}{24\,\mathcal{B}} = -\frac{32}{24\,\mathcal{B}}$$

Nagib od MB l=2 tabela 3b

$$\beta_{MB} = \frac{M_B \cdot l}{3\mathcal{B}} = \frac{2 \cdot M_B}{3\mathcal{B}}$$

Greda sa dva raspona metod dekompozicije

$$\alpha_B = \alpha_F + \alpha_q + \alpha_{MB}$$



Nagib od sile F=12 a=1, b=1, l=4, z=2 tabela 1

$$\alpha_F = \frac{F \cdot l^2}{16\mathcal{B}} = \frac{12 \cdot 2^2}{16\mathcal{B}} = \frac{12 \cdot 4}{16\mathcal{B}} = \frac{48}{16\mathcal{B}}$$

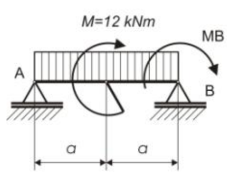
Nagib od kontinualnog opterećenja q=4 a=0, b=0, l=2 tabela 6

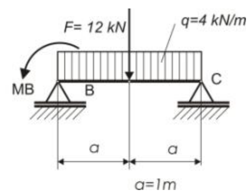
$$\alpha_q = \frac{F_q \cdot l^2}{24\mathcal{B}} = \frac{8 \cdot 2^2}{24\mathcal{B}} = \frac{8 \cdot 4}{24\,\mathcal{B}} = \frac{32}{24\,\mathcal{B}}$$

Nagib od MB l=2 tabela 3b

$$\alpha_{MB} = -\frac{M_B L}{3\mathcal{B}} = -\frac{2 \cdot M_B}{3\mathcal{B}}$$

Greda sa dva raspona metod dekompozicije





$$\beta_B = \alpha_B$$

$$\beta_B = \beta_M + \beta_{MB} + \beta_q \qquad \alpha_B = \alpha_F + \alpha_q + \alpha_{MB}$$

- Izjednačavanjem i rešavanjem izraza ya nagibe dobija se rastavni momet

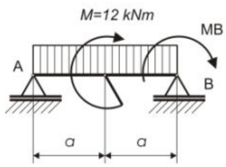
$$\beta_{M+}\beta_q + \beta_{MB} = \alpha_q + \alpha_F + \alpha_{MB}$$

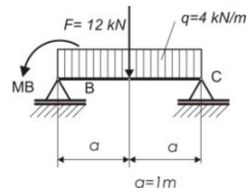
$$-\frac{32}{24\,\mathcal{B}} - \frac{24}{24 \cdot \mathcal{B}} + \frac{2 \cdot M_B}{3\mathcal{B}} = \frac{32}{24\,\mathcal{B}} + \frac{48}{16\mathcal{B}} - \frac{2 \cdot M_B}{3\mathcal{B}}$$

$$\frac{2 \cdot M_B}{3\mathcal{B}} + \frac{2 \cdot M_B}{3\mathcal{B}} = \frac{32}{24\,\mathcal{B}} + \frac{48}{16\mathcal{B}} + \frac{32}{24\,\mathcal{B}} + \frac{24}{24 \cdot \mathcal{B}}$$

$$\frac{4 \cdot M_B}{3\mathcal{B}} = \frac{20}{3\mathcal{B}} \rightarrow M_B = 5\ kNm$$

Greda sa dva raspona metod dekompozicije



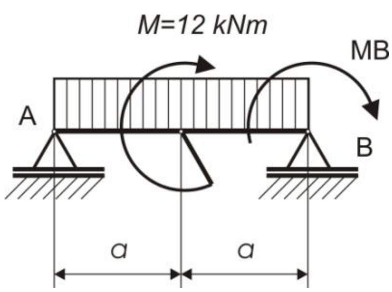


$$\beta_B = \alpha_B$$

$$\beta_B = \beta_M + \beta_{MB} + \beta_q \qquad \alpha_B = \alpha_F + \alpha_q + \alpha_{MB}$$

- Kadje sračunat moment svaka od greda se računa ponaosob $M_B = 5\ kNm$
- Sračunati otpori oslonca B levo i desno se algebarski sabiraju

Greda sa dva raspona metod dekompozicije



$$M_B = 5\ kNm$$

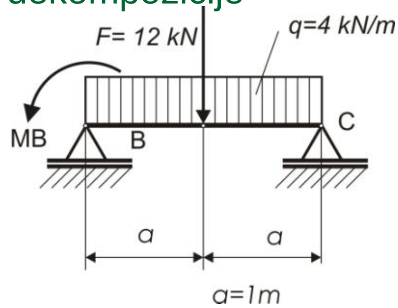
$$\sum M_A = M + a \cdot 2a \cdot q + M_B - 2a \cdot F_{BL} = 0$$

$$F_{BL} = 12.5\ kN$$

$$\sum Y_i = F_A + F_{BL} - q \cdot 2a = 0$$

$$F_A = -4.5\ kN$$

Greda sa dva raspona metod dekompozicije



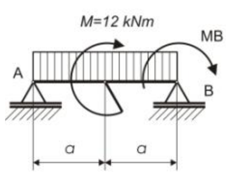
$$\sum M_C = F \cdot a + M_B + q \cdot 2a - 2a \cdot F_{BD} = 0$$

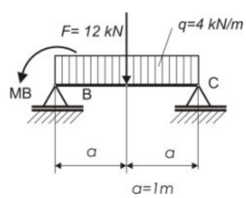
$$F_{BD} = 12.5\ kN$$

$$\sum Y_i = F_C + F_{BD} - q \cdot 2a - F = 0$$

$$F_C = 7.5\ \ kN$$

Greda sa dva raspona metod dekompozicije





$$\beta_B = \alpha_B$$

$$\beta_B = \beta_M + \beta_{MB} + \beta_q \qquad \alpha_B = \alpha_F + \alpha_q + \alpha_{MB}$$

- Sračunati otpori oslonca B levo i desno se algebarski sabiraju
- Greda se dalje rešava kao jedna statički određena greda jer su poznati otpori oslonaca

$$F_B = F_{BD} + F_{BL} = 12.5 + 12.5 = 25\ kN$$