



Aksijalno naprezanje

Unutrašnje sile i naponi, deformacije,
Hukov zakon, Poasonov koeficijent,
mehaničke karakteristike materijala,
dimenzionisanje aksijalno napregnutog
štapa



Osnovni pojmovi

- **Kruto telo**

Rastojanje ma koje 2 tačke je stalno,
ne menja se,
telo se ne deformiše
predmet proučavanja mehanike

- **Čvrsto telo**

Rastojanje ma koje 2 tačke se menja pod dejstvom sila,
realna tela koja mogu da se deformišu
menjaju svoj oblik i veličinu

PREDMET IZUČAVANJA OTPORNOSTI MATERIJALA

Otpornost materijala

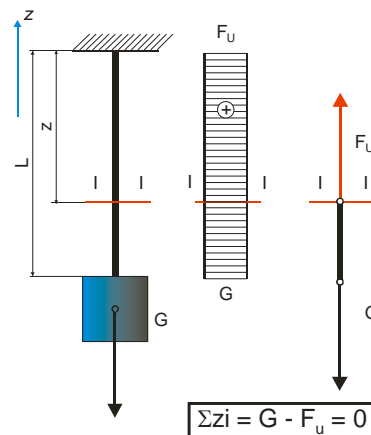
Osnovne pretpostavke otpornosti materijala

- Pretpostavka o linearnoj zavisnosti napona i deformacija (Hukov zakon)
- Princip početnih dimenzija (deformacije su male)
- Princip nezavisnosti dejstva sile (superpozicije)
- Princip Sen-Venana

Otpornost materijala

Spoljašnje i unutrašnje sile

- Telo je u ravnoteži kada na njega deluju dve sile jednakih veličina, kolinearne i suprotnih smerova
- Prema zakonu akcije i reakcije Usled dejstva tereta, **spoljašnjih sile**, pojaviće se sile koje se odupiru dejstvu spoljašnjih sile **unutrašnje sile**





Naprezanja, naponi i deformacije

- Kada čvrsto telo napadaju spoljašnje sile kažemo da je **NAPREGNUTO** ili u stanju naprezanja
- Pod uticajem spoljašnjih sila telo donekle menja svoj oblik i zapreminu
DEFORMIŠE SE

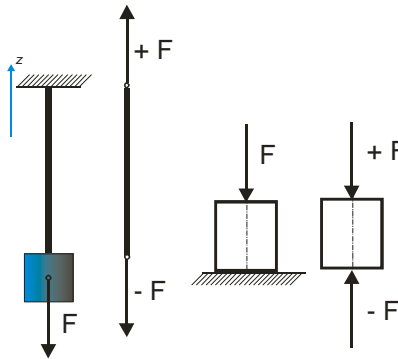


Osnovne vrste naprezanja:

- **Aksijalno naprezanje**
- Smicanje
- Uvijanje
- Savijanje
- Izvijanje

Aksijalno naprezanje

- Zatezanje
- Pritisak

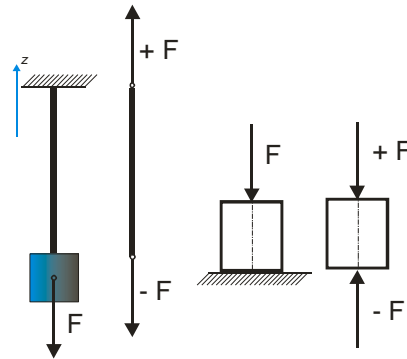


Aksijalno naprezanje

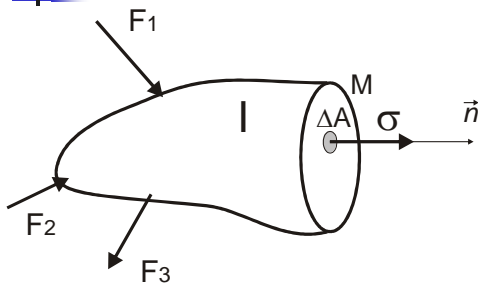
- Aksijalno naprezanje (zatezanje ili pritisak) je takvo naprezanje pri kome se u poprečnim preseccima opterećenog dela, najčešće štapa, javljaju samo aksijalne unutrašnje sile (unutrašnje sile su u pravcu uzdužne ose štapa)

Aksijalno naprezanje

- Aksijalno naprezanje izazivaju sile kolinearne sa osom štapa ili više sila čija je rezultanta u pravcu ose štapa

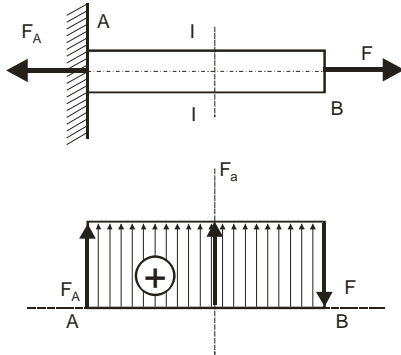


Kod aksijalnog naprezanja postoje samo normalni naponi



- Normalni napon σ (sigma) - izduženje ili skraćenje
- Nema tangencijalnih napona τ (tau)

Unutrašnje sile i naponi



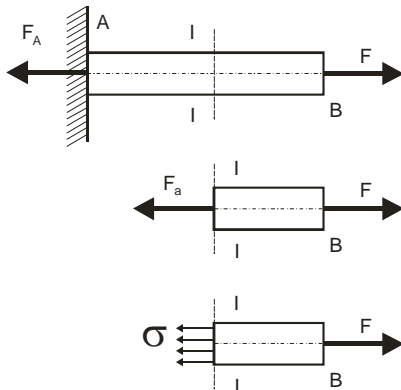
- Ravnoteža spoljašnjih i unutrašnjih sila
- Dijagram promene aksijalne sile

$$\sum F_z = F - F_A = 0$$

$$\sum F_z = F - F_a = 0$$

Zanemaren je uticaj težine štapa, posmatra se homogeni štapa konstantnog poprečnog preseka

Unutrašnje sile i naponi

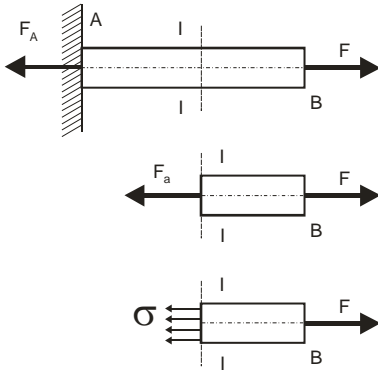


- Za proizvoljni zamišljeni normalni presek važe uslovi ravnoteže:

$$\sum F_z = F - F_A = 0$$

$$\sum F_z = F - F_a = 0$$

Unutrašnje sile i naponi



- Normalni napon konstantan u svakoj tački poprečnog preseka
- Poprečni presek nepromenljiv čitavom dužinom štapa
- Normalan napon dobija se kao odnos sile po površini

$$F_a = \int_A \sigma dA = \sigma \int_A dA = \sigma \cdot A$$

$$\sigma = \frac{F_a}{A}$$

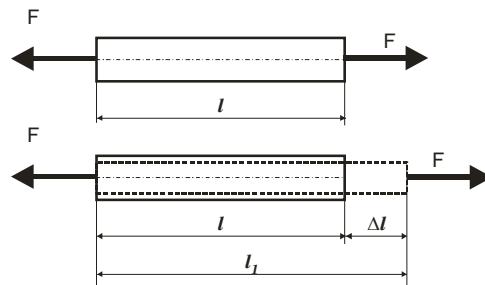
Jedinica **MPa**

Stare jedinice: kp/mm²

i kg/cm²

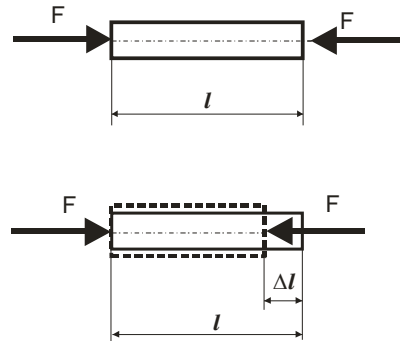
Deformacije kod aksijalnog naprezanja

- Čelični štapa dužine l deformisaće se pod dejstvom sile zatezanja F
- Dužina će se povećati za Δl
- Ukoliko su veće aksijalne sile utoliko su veća i izduženja



Deformacije kod aksijalnog naprezanja

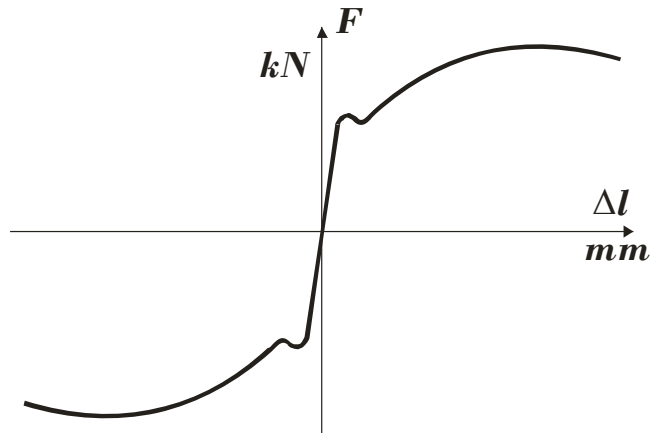
- Čelični štap dužine l deformisaće se pod dejstvom sile pritiskanja F
- Dužina će se smanjiti za Δl
- Ukoliko su veće pritisne aksijalne sile utoliko su veća i skraćenja



Deformacije kod aksijalnog naprezanja

- Deformacija (u oba slučaja) je u promeni dužine štapa
- Deformacija je zavisna od veličine aksijalnih sila te raste ukoliko su sile veće
- Uz odgovarajuću opremu moguće je snimiti zavisnost između spoljašnjeg opterećenja (aksijalnih sila) i odgovarajućih deformacija

Dijagram sile i deformacije čelične šipke



Dijagrami napona i dilatacije

- Dijagram sile i izduženja zavisi od dimenzija šipke
- Za svaku ispitivanu šipku dobio bi se sličan dijagram
- Da bi se otklonile neusaglašenosti i dobile poredive vrednosti izvršena je **standardizacija** metodologije ispitivanja i epruvete koje se koriste

Dijagrami napona i dilatacije

- Za debele materijale propisane su prave cilindrične epruvete
- Za limove propisane su pljosnate epruvete
- Propisane su i dužine epruveta i to:
 - DUGAČKE $l_0 = 10 \cdot d_0$
 - KRATKE $l_0 = 5 \cdot d_0$

Standardna epruveta za ispitivanje zatezanjem

d_0 - PREČNIK MERNOG DELA

l_0 - MERNI DUŽINA

$d_k = 1,2 d_0$ PREČNIK KRAJEVA

$l_p = l_0 + d_0$ - DUŽINA SREDNJEG
CILINDRIČNOG DELA

h - DUŽINA KRAJEVA EPRUVETE



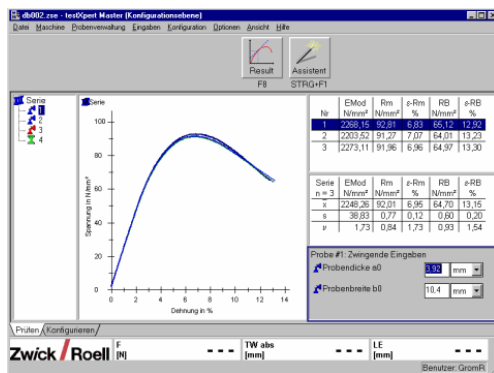
Otpornost materijala

Ispitivanje zatezanjem na hidrauličnoj kidalici

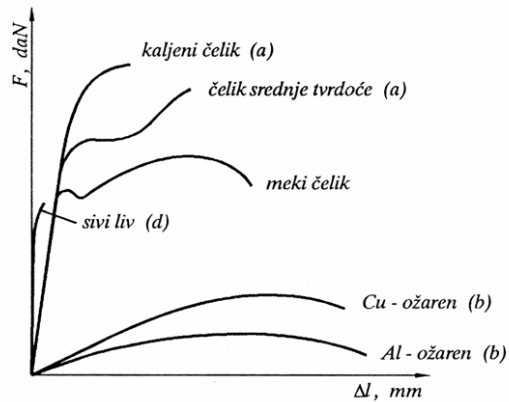


Otpornost materijala

Savremene mašine za ispitivanje zatezanjem



Dijagrami sila - izduženje za različite materijale



Dijagram sila – izduženje dijagram napon - dilatacija

- Umesto izduženja naneti odnos izduženja i prvobitne dužine

$$\varepsilon = \frac{\Delta l_0}{l_0}$$

- ε – **Dilatacija**, neimenovan broj

Dijagram sila – izduženje dijagram napon - dilatacija

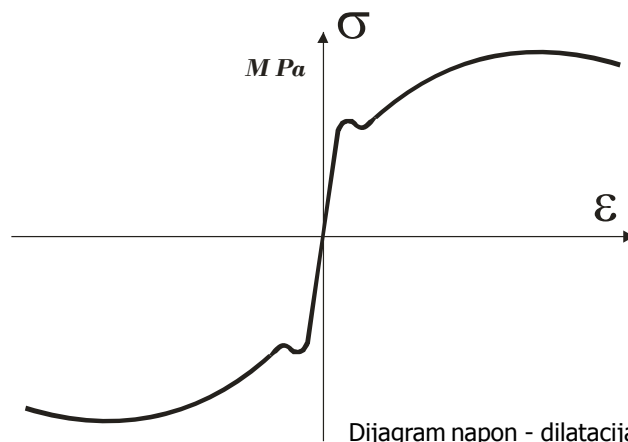
- Umesto sile naneti odnos sile i površine poprečnog preseka

$$\sigma = \frac{F}{A_0}$$

- σ – **Napon** MPa

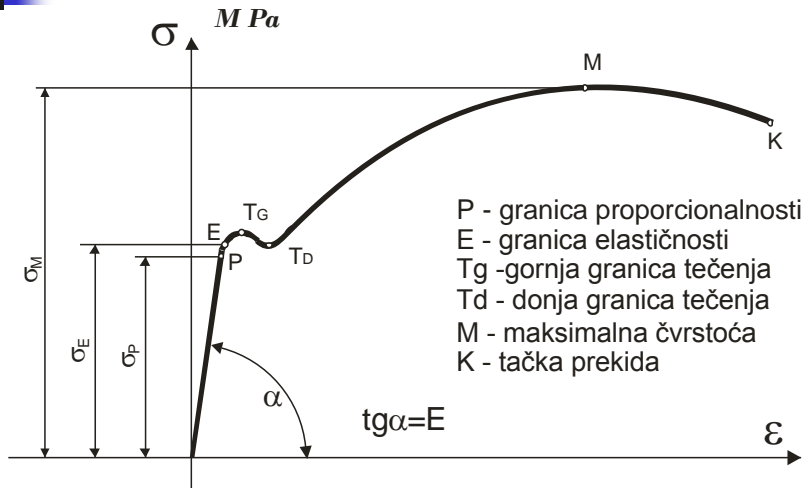
Prema važećim standardima napon se označava sa **R**

Dijagram napon - dilatacija



Dijagram napon - dilatacija za meki čelik

Karakteristične tačke na dijagramu napon - dilatacija



Hukov zakon

- Od koordinatnog početka do tačke P postoji proporcionalnost između napona i dilatacije
- E** – koeficijent proporcionalnosti
MODUL ELASTIČNOSTI
ili Jungov modul
dimenzija MPa

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

Hukov zakon

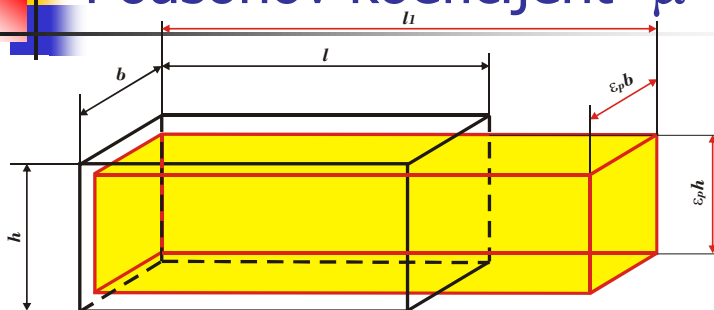
- Hukov zakon u obliku $\sigma = E\varepsilon$
- Zamenom u izrazu za dilataciju kao $\varepsilon = \Delta l / l_0$
- Napon kao odnos $\sigma = F/A$
- Dobija se izraz za Hukov zakon u obliku

$$\Delta l = \frac{F \cdot l}{E \cdot A}$$

Dužina šipke posle prekida

$$l_1 = l + \Delta l = l + \varepsilon \cdot l = l(1 + \varepsilon)$$

Poasonov koeficijent μ



ε – uzdužna dilatacija

ε_p – poprečna dilatacija

- koeficijent zavisnosti poprečne dilatacije od uzdužne
- Poasonov koeficijent je neimenovan broj

$$\varepsilon_p = -\mu \cdot \varepsilon$$



Poasonov koeficijent

Izračunavanjem zapremina pre i posle deformacije dobija se zapreminska dilatacija kao

$$V = l \cdot b \cdot h$$

$$V = l_1 \cdot b_1 \cdot h_1 = l \cdot b \cdot h (1 + \varepsilon)(1 - \mu\varepsilon)^2$$

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V} = \frac{V_1 - V}{V}$$

$$\varepsilon_v \approx \varepsilon(1 - 2\mu)$$



Poasonov koeficijent i modul elastičnosti

Materijal	μ [-]	E [MPa]
Čelik	0,3	$2.1 \cdot 10^5$
Aluminijum	0,34	$0.7 \cdot 10^5$
Bakar	0,33	$1.1 \cdot 10^5$
Mesing	0,37	$1.0 \cdot 10^5$
Sivi liv	0,25	$1.0 \cdot 10^5$
Beton	1/6	$0.3 \cdot 10^5$

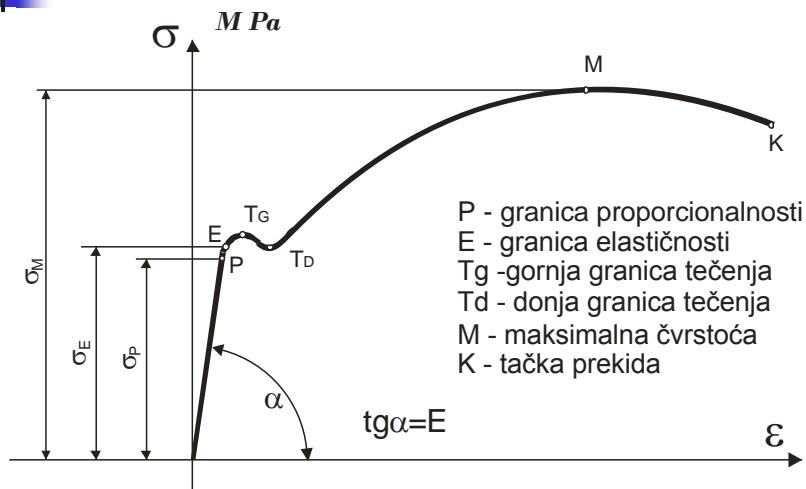
Otpornost materijala

Dimenzionisanje aksijalno napregnutog štapa, dozvoljeni napon, stepen sigurnosti

- Obrasci u otpornosti materijala izvedeni su na osnovu Hukovog (Robert Hooke) zakona, to jest zakona proporcionalnosti
- Pri dimenzionisanju delova treba to poštovati, pa dozvoljeni napon merodavan za proračun mora biti manji od napona na granici proporcionalnosti što se postiže uvođenjem stepena sigurnosti

Otpornost materijala

Dozvoljeni napon mora biti manji od napona na granici proporcionalnosti



Dimenzionisanje aksijalno napregnutog štapa, dozvoljeni napon, stepen sigurnosti

Stepen sigurnosti je količnik jačine na kidanje, zatezne čvrstoće, ili granice tečenja materijala od kog je proračunavani štap i dozvoljenog napona

$$v_M = \frac{\sigma_M}{\sigma_{doz}} \quad v_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_{doz}}$$

Dozvoljeni napon

Dozvoljeni napon je količnik jačine na kidanje, zatezne čvrstoće, od kog je proračunavani deo i stepena sigurnosti

$$\sigma_{doz} = \sigma_d = \frac{\sigma_M}{v}$$



Stepen sigurnosti

Zavisno od toga na koju karakteristiku se odnosi, razlikuju se:

- Stepen sigurnosti u odnosu na zateznu čvrstoću
- Stepen sigurnosti u odnosu na granicu tečenja

$$V_M = \frac{\sigma_M}{\sigma_{doz}} \quad V_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_{doz}}$$



Na izbor veličine stepena sigurnosti utiču

- Tačnost određivanja spoljašnjih sila
- Način dejstva spoljašnjih sila
- Namena projektovane konstrukcije
- Zakonska regulativa za određene projekte
- Osobine primenjenih materijala



Stepen sigurnosti prema vrsti opterećenja

1. Mirno opterećenje
2. Jednosmerno promenljivo
3. Naizmenično promenljivo



Stepeni sigurnosti

- U okviru ovog kursa biće korišćeni stepeni sigurnosti u odnosu na zateznu čvrstoću
- Biće rešavani primeri sa mirnim opterećenjima

Stepen sigurnosti

Vrednosti stepena sigurnosti u odnosu na zateznu čvrstoću koji se sreću u literaturi:

Za čelik termički neobrađen

- za mirno opterećenje 2.5-3
- za naizmjenično promenljivo 5-6

Za liveno gvožđe

- za mirno opterećenje 3-6
- za naizmjenično promenljivo 5-12

Primer primene stepena sigurnosti

- Iz tablica karakteristika materijala za određen materijal očitava se zatezna čvrstoća
- Primer za Č.0545
- $\sigma_M = 500-600 \text{ MPa}$ $\sigma_{eH} = 280-300 \text{ MPa}$

$$\sigma_{doz} = \frac{\sigma_M}{\nu} = \frac{500}{3} = 176 \text{ MPa}$$

Napon aksijalno napregnutog štapa

- Napon aksijalno napregnutog dela mora biti manji ili jednak dozvoljenom naponu
- Normalni napon ili napon kod zatezanja predstavlja količnik aksijalne sile i površine poprečnog preseka

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \sigma_{doz} \quad MPa$$

Kod aksijalnog naprezanja postoje tri osnovna zadatka

- Poznato je opterećenje i poprečni presek štapa i treba odrediti **veličinu napona**
- Poznato je opterećenje, oblik poprečnog preseka i materijal, a potrebno je odrediti **dimenzije** tog preseka
- Poznati su poprečni presek i dozvoljeni napon, a potrebno je odrediti **vrednost maksimalne sile**

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

$$A = \frac{F}{\sigma_{doz}}$$

$$F = \sigma_{doz} \cdot A$$

Definisanje veličine napona aksijalno napregnutog štapa

- Odrediti vrednosti opterećenja odnosno aksijalnu silu koja deluje na štap
- Izračunati površinu poprečnog preseka štapa
- Izračunati napon koji nastaje delovanjem aksijalne sile
- Uporediti vrednost sa određenim dozvoljenim naponom

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \sigma_{doz} \quad \text{MPa}$$

Dimenzionisanje aksijalno napregnutog štapa

- Odrediti vrednost aksijalne sile koja deluje na štap
- Odrediti dozvoljeni napon za odabrani materijal
- Sračunati potrebnu površinu preseka

$$A = \frac{F}{\sigma_{doz}} \quad \text{m}^2$$

Za dimenzionisani štap odrediti vrednost aksijalne sile

- Odrediti površinu preseka
- Odrediti dozvoljeni napon za poznati materijal i definisani stepen sigurnosti
- Sračunati maksimalnu aksijalnu silu

$$F = \sigma_{doz} \cdot A \quad \text{N}$$

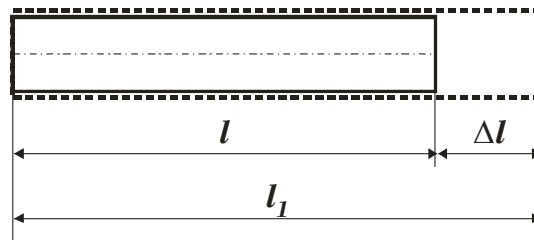
Preporuke pri dimenzionisanju

1. Veličina aksijalnog opterećenja - statika
2. Površina poprečnog preseka
3. Normalni napon za poprečni presek - stepen sigurnosti ν
4. Za odabrani materijal dozvoljeni napon
5. Veličina poprečnog preseka
6. Veličina opterećenja za poznatu površinu i materijal

Uticaj temperature na deformacije i napone

- Pod uticajem toplote sva tela se šire
- Širenje zavisi od materijala i temperaturene razlike
- Promena dužine štapa proporcionalna je dužini štapa, vrsti materijala i promeni temperature

Uticaj temperature na deformacije i napone



$$\Delta l = \alpha \cdot l \cdot \Delta t$$

$$\Delta l = l_1 - l$$

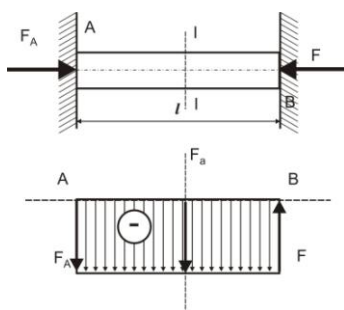
$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \alpha \cdot \Delta t$$

Uticaj temperature na deformacije i napone

- Koeficijent linearnog širenja $\alpha [^{\circ}C^{-1}]$

Materijal	$\alpha [^{\circ}C^{-1}]$
Čelik	$12 \cdot 10^{-6}$
Aluminijum	$23 \cdot 10^{-6}$
Bakar	$17 \cdot 10^{-6}$
Mesing	$19 \cdot 10^{-6}$
Sivi liv	$9 \cdot 10^{-6}$

Unutrašnje sile i naponi usled zagrevanja



- Ravnoteža spoljašnjih i unutrašnjih sila
- Dijagram promene aksijalne sile za statički neodređen nosač

$$\sum F_z = F_A - F_B = 0$$

$$\sum F_z = F - F_a = 0$$

- Usled promene toplote nastaje izduženje štapa
- Pošto između oslonaca ne dolazi do izduženja, raste napon u samom štapu

Unutrašnje sile i naponi usled zagrevanja

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

$$\Delta l = l \cdot \alpha \cdot \Delta t$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \alpha \cdot \Delta t$$

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

$$\sigma = E \cdot \alpha \cdot \Delta t$$

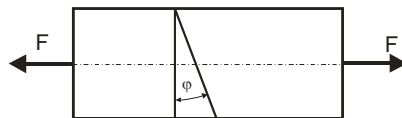
$$\sigma = \frac{F_a}{A_o} \Rightarrow F_a = \sigma \cdot A_o$$

Ako je nastala deformacija u zoni elastičnosti materijala, za postojeću temperaturnu razliku nastala bi dilatacija

Prema Hukovom zakonu napon je definisan kao proizvod modula elastičnosti i dilatacije

Može se odrediti i unutrašnja sila

Napon u kosom preseku aksijalno napregnutog štapa



$$\sigma = \frac{F}{A}$$

Ako analiziramo aksijalno napregnut štاپ i neki presek pod uglom φ

$$p = \frac{F}{A_\varphi}$$

Napon u kosom preseku aksijalno napregnutog štapa

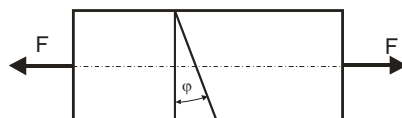
- U svakoj tački poprečnog preseka aksijalno napregnutog štapa javlja se normalni napon σ , a tangentskog napona τ nema

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

- (napon je vektorska veličina ima pravac, smer i intenzitet)
- U kosom preseku aksijalno napregnutog štapa javlja se totalni napon p

$$p = \frac{F}{A_\varphi}$$

Napon u kosom preseku aksijalno napregnutog štapa



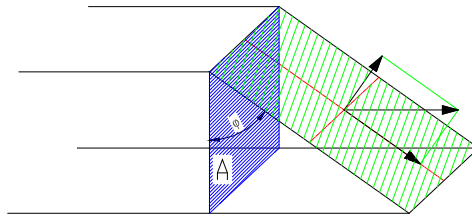
$$\sigma = \frac{F}{A}$$

Ako analiziramo aksijalno napregnut štاپ i neki presek pod uglom φ

$$p = \frac{F}{A_\varphi}$$

Napon u kosom preseku aksijalno napregnutog štapa

Ako analiziramo aksijalno napregnut štap i neki presek pod uglom φ

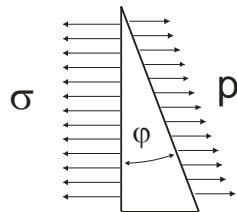


$$\sigma = \frac{F}{A}$$

$$p = \frac{F}{A_\varphi}$$

Napon u kosom preseku aksijalno napregnutog štapa

- Ako analiziramo uočeni normalni presek i kosi presek pod uglom φ



$$\sigma = \frac{F}{A} \quad p = \frac{F}{A_\varphi}$$

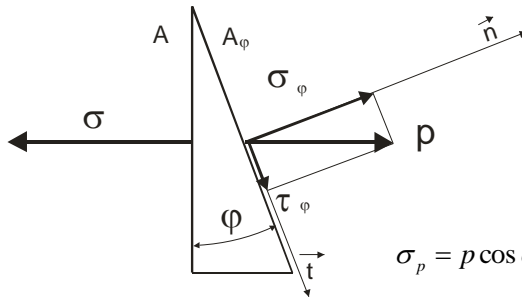
$$\sum F_z = p \cdot A_\varphi - \sigma \cdot A = 0$$

$$A_\varphi = \frac{A}{\cos \varphi}$$

$$p = \sigma \frac{A}{A_\varphi} = \sigma \frac{A}{\frac{A}{\cos \varphi}} = \sigma \cos \varphi$$

Napon u kosom preseku aksijalno napregnutog štapa

- Komponente napona u pravcu normale i tangente na posmatrani kosi presek



$$\sigma_p = p \cos \varphi = \sigma \cos^2 \varphi = \frac{1}{2} \sigma (1 + \cos 2\varphi)$$

$$\tau_p = p \sin \varphi = \sigma \sin \varphi \cos \varphi = \frac{1}{2} \sigma \sin 2\varphi$$

Napon u kosom preseku aksijalno napregnutog štapa

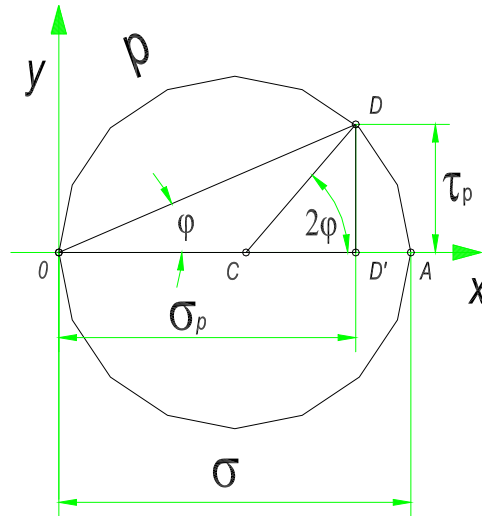
- Analizom dobijenih izraza u funkciji ugla φ

$$\sigma_p = \frac{1}{2} \sigma (1 + \cos 2\varphi) \quad i \quad \tau_p = \frac{1}{2} \sigma \sin 2\varphi$$

$$\text{imajući na umu} \quad p = \sqrt{\sigma_\varphi^2 + \tau_\varphi^2}$$

- Najveći normalni naponi su za $\varphi=0^\circ$ $\sigma_{\max}=\sigma$,
a najmanji, odnosno jednaki nuli za $\varphi=90^\circ$ $\sigma_{\min}=0$
- Najveći tangencijalni i najmanji naponi su za $\varphi=45^\circ$ $\tau_{\max,\min}=\pm 1/2 \sigma$

Grafički prikaz – Morov krug napona

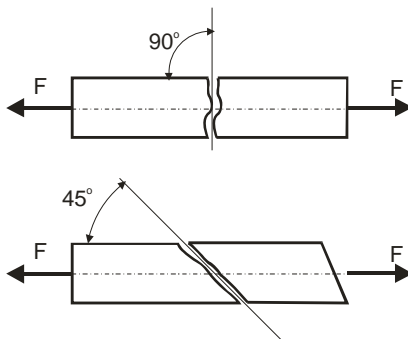


$$\sigma_p = \frac{1}{2} \sigma (1 + \cos 2\varphi)$$

$$\tau_p = \frac{1}{2} \sigma \sin 2\varphi$$

$$\rho = \sqrt{\sigma_p^2 + \tau_p^2}$$

Napon u kosom preseku aksijalno napregnutog štapa



- Kod krkih materijala (kaljenih čelika, sivog liva ili kamena) prekid je poprečan
- Kod plastičnih, mekih, materijala (meki čelik, bakar, aluminijum) pucaju pod uglom od 45°



Rezime

- Istezanje izazivaju aksijalne sile kolinearne sa osom štapa
- Unutrašnje aksijalne sile su jednake spoljašnjim, ali suprotnog smera
- Normalni napon σ je količnik aksijalne sile i površine poprečnog preseka
- Dilatacija $\varepsilon = \Delta/l_0$, dijagram napon - dilatacija
- E – modul elastičnosti
- Hukov zakon - napon proporcionalan proizvodu modula elastičnosti i dilatacije $\sigma = E\varepsilon$
- Poasonov koeficijent μ
- $\varepsilon = -\mu\varepsilon_p$, $\varepsilon_v = \varepsilon (1-2\mu)$
- Dozvoljeni napon, stepen sigurnosti
- Uticaj temperature na deformacije i napone