

Napomena: $1 \text{ Pa} = \frac{1 \text{ N}}{1 \text{ m}^2}$; $10 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} = 1 \text{ MPa}$;

$\tau = G \cdot \gamma$ Hukov zakon

$\theta = \frac{l}{R} \cdot \frac{\tau_{\max}}{G} = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_0} \text{ rad}$ $\theta^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \theta = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_0}$ ukupan ugao uvijanja na dužini l

$\theta' = \frac{M_t}{G \cdot I_0} \leq \theta'_{\text{doz}}$ uslov deformabilnosti dozvoljeni ugao uvijanja po jedinici dužine

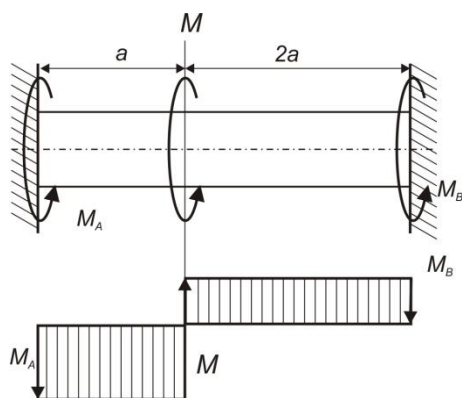
$\tau = \frac{M_t \cdot R}{I_0} = \frac{M_t}{W_0} \leq \tau_d$ uslov nosivosti dozvoljeni smicajni napon

$W_0 = \frac{I_0}{R}$ treba se podsetiti $I_0 = I_x + I_y$ za kružni presek $I_0 = \frac{d^4 \pi}{32}$

Za prstenasti presek $I_0 = \frac{d_2^4 \pi}{32} \left(1 - \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4\right) = \frac{d^4 \pi}{32} (1 - \psi^4)$ gde je $\psi = \frac{d_1}{d_2}$

Zadatak 4.1.

Krajevi štapa kružnog poprečnog preseka kruto su uklješteni. U poprečnom preseku između krajeva štapa deluje u ravni normalnoj na osu štapa spreg sila momenta 12 kNm. Odrediti najveći tangencijalni napon ako je prečnik vratila $d=80 \text{ mm}$.



Rešenje:

$$\sum M_t = 0 = M_A - M + M_B = 0$$

$$\sum \theta_i = 0$$

$$\frac{M_A \cdot a}{G \cdot I_0} + \frac{(M_A - M) \cdot 2a}{G \cdot I_0} = 0 \quad | \cdot \frac{G \cdot I_0}{a}$$

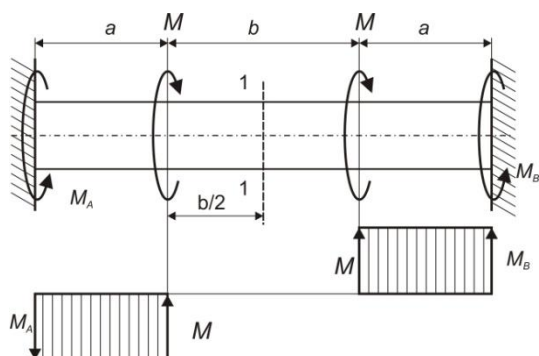
$$3M_A - 2M = 0 \rightarrow M_A = \frac{2}{3} M = \frac{2}{3} \cdot 12 = 8 \text{ kNm}$$

$$M_B = M - M_A = 12 - 8 = 4 \text{ kNm}$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_A \cdot R}{I_0} = \frac{M_A \cdot \frac{d}{2}}{\frac{d^4 \pi}{32}} = \frac{16 \cdot M_A}{d^3 \pi} = \frac{16 \cdot 8 \cdot 10^3}{8^3 \cdot 10^{-6} \pi} = 0.0795 \cdot 10^9 \text{ Pa} = 79.5 \cdot \text{MPa}$$

Zadatak 4.2.

Krajevi štapa kružnog poprečnog preseka sa uklještenim krajevima podvrgnut je dejstvu dva jednaka i isto usmerenim momentima uvijanjapo 8 kNm. Odrediti ugao uvijanja srednjeg preseka 1-1 ako je prečnik štapa $d=100 \text{ mm}$, a rastojanja $a=0.6 \text{ m}$, $b=0.8 \text{ m}$, $G=8 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$.



Rešenje:

$$1. \sum M_t = 0 = M_A - M - M + M_B = 0$$

$$2. \sum \theta_i = 0$$

$$2. \frac{M_A \cdot a}{G \cdot I_0} + \frac{(M_A - M) \cdot b}{G \cdot I_0} + \frac{(M_A - 2M) \cdot a}{G \cdot I_0} = 0 \quad | \cdot G \cdot I_0$$

$$M_A \cdot a + M_A \cdot b - M \cdot b + M_A \cdot a - 2M \cdot a = 0$$

$$(2a + b)M_A - (2a + b)M = 0$$

$$M_A = \frac{b+2a}{2a+b}M = M = 8 \text{ kNm}$$

$$\theta = \frac{M_A \cdot a}{G \cdot I_0} + \frac{0 \cdot \frac{b}{2}}{G \cdot I_0} = \frac{8 \cdot 10^3 \cdot 0.6}{8 \cdot 10^{10} \cdot \frac{1^4 \pi}{32} \cdot 10^{-4}} = 0.0611 \text{ rad} = 0.35^\circ$$

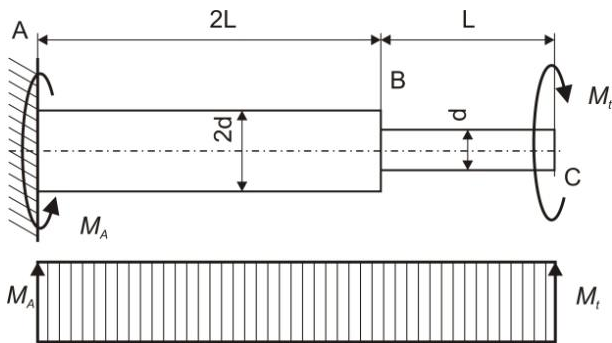
Zadatak 4.2.

Vratilo ABC, kružnog poprečnog preseka, opterećeno je momentom uvijanja $M=100\text{kNm}$. Dimenzionisati vratilo ako je dozvoljeni smicajni – tangencijalni napon $\tau_{td}=80 \text{ MPa}$, a dozvoljeni ugao uvijanja po jedinici dužine $\theta_d = \frac{\pi}{720} \frac{\text{rad}}{\text{m}}$.

a) Izračunati maksimalne napone na delovima vratila AB i BC.

b) Izračunati uglove uvijanja preseka B i C.

Modul klizanja je $G=8 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$, a dužine vratila $AB=2L=1.2\text{m}$, $BC=L=0.6\text{m}$,



Rešenje:

a) dimenzionisanje
prema najvećem tangencijalnom naponu

$$\tau_{max} = \frac{M_t \cdot R}{I_0} = \frac{M_t \cdot \frac{d}{2}}{\frac{d^4 \pi}{32}} = \frac{16 M_t}{d^3 \pi} \leq \tau_d$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 M_t}{\pi \tau_d}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 100 \cdot 10^3}{\pi \cdot 80 \cdot 10^6}} = 0.185 \text{ m}$$

Prema najvećoj dozvoljenoj deformaciji

$$\theta' = \frac{M_A}{G \cdot I_0} \leq \theta'_{doz}$$

$$I_0 = \frac{d^4 \pi}{32} = \frac{M_A}{G \cdot \theta'_{doz}}$$

$$d = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_A}{\pi \cdot G \cdot \theta'_{doz}}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 100 \cdot 10^3}{\pi \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot \frac{\pi}{720}}} = 0.3094 \text{ m}$$

Prema dobijenim vrednostima kao merodavan usvaja se veći prečnik standardizovan na $d=320 \text{ mm}$

b) Maksimalni naponi

$$I_{0BC} = \frac{d^4 \pi}{32} = \frac{0.32^4 \pi}{32}$$

$$I_{0AB} = \frac{(2d)^4 \pi}{32} = \frac{0.64^4 \pi}{32}$$

$$\tau_{ABmax} = \frac{M_A \cdot R}{I_{0AB}} = \frac{M_A \cdot d}{\frac{(2d)^4 \pi}{32}} = \frac{32 \cdot 100 \cdot 10^3 \cdot 0.32}{0.64^4 \cdot \pi} = 19242809 \text{ Pa} = 19.24 \text{ MPa}$$

$$\tau_{BCmax} = \frac{M_A \cdot R}{I_{0BC}} = \frac{M_A \cdot \frac{d}{2}}{\frac{d^4 \pi}{32}} = \frac{32 \cdot 100 \cdot 10^3 \cdot 0.16}{0.32^4 \cdot \pi} = 15542474 \text{ Pa} = 15.54 \text{ MPa}$$

c) Uglovi uvijanja

$$\theta_{AB} = \frac{M_A \cdot 2l}{G \cdot I_{0AB}} = \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 0.4}{8 \cdot 10^{10} \cdot \frac{0.64^4 \pi}{32}} = 0.0000607 \text{ rad}$$

$$\theta_{BC} = \frac{M_A \cdot l}{G \cdot I_{0BC}} = \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 0.4}{8 \cdot 10^{10} \cdot \frac{0.32^4 \pi}{32}} = 0.000485702 \text{ rad}$$

$$\theta_{AC} = \theta_{AB} + \theta_{BC} = 0.000546402 \text{ rad}$$